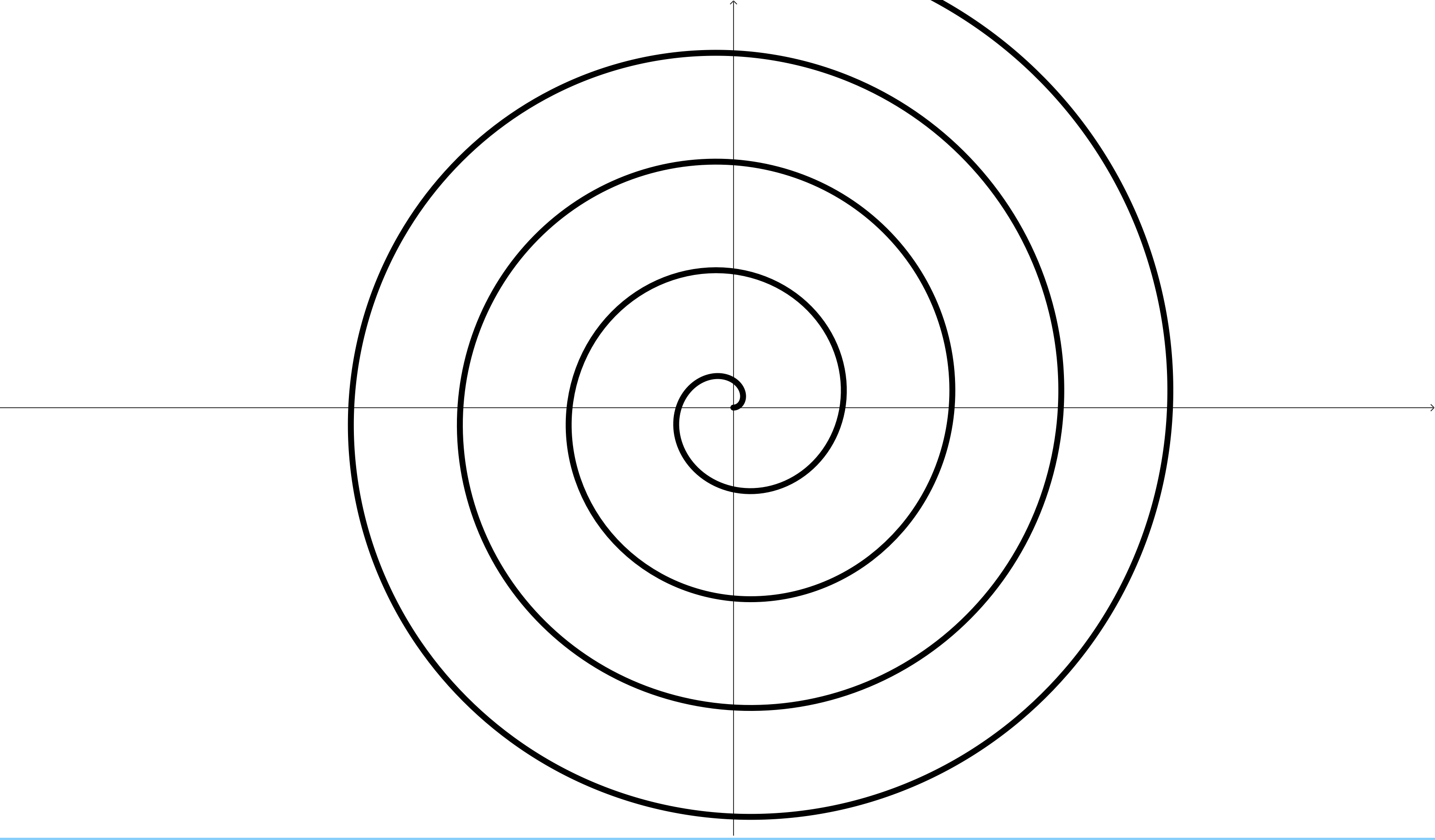

数学物理方程 - 戴嘉尊 - 笔记

作者：若水

邮箱：ethanmxzhou@163.com

主页：helloethanzhou.github.io

时间：July 18, 2024

致谢

感谢 **勇敢的** 自己

目录

第一章 数学物理中的典型方程

1.1 典型方程

1.1.1 定解问题

定义 1.1.1 (定解问题)

$$定解问题 = 泛定方程 + 定解条件$$

1. 初值问题 (Cauchy 问题):
$$\text{Cauchy 问题} = 泛定方程 + 初始条件$$
2. 边值问题
$$边值问题 = 泛定方程 + 边界条件$$
   - 第一边值问题 (Direchlet 问题):
   $$\text{Direchlet 问题} = 泛定方程 + 第一边界条件$$
   - 第二边值问题 (Neuman 问题):
   $$\text{Neuman 问题} = 泛定方程 + 第二边界条件$$
   - 第三边值问题 (Robin 问题):
   $$\text{Robin 问题} = 泛定方程 + 第三边界条件$$
   - 混合边值问题
   $$混合边值问题 = 泛定方程 + 混合边界条件$$
3. 混合问题
$$混合问题 = 泛定方程 + 初始条件 + 边界条件$$

♣

1.1.2 弦振动方程

定义 1.1.2 (弦振动方程)

物理问题：一根长 l 柔软均匀细弦，拉紧后让其离开平衡位置在垂直于弦线的外力作用下做微小横振动。取弦的平衡位置为 x 轴，垂直于平衡位置且通过弦线的一个端点的直线为 u 轴，弦振动方程 $u(x,t)$ 为

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f$$

其中 a 与弦的材质有关，f 与弦所受外力有关。

1. 初始条件：
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$$
特别的，当 $\varphi = \psi = 0$ 时称之为齐次初始条件。
2. 边界条件：
   - 第一边界条件 (Direchlet 边界条件):
   $$u(0,t) = g_1(t), \qquad u(l,t) = g_2(t)$$
   特别的，当 $g_1 = g_2 = 0$ 时称之为第一齐次边界条件。

- 第二边界条件 (Neuman 边界条件)：

$$u_x(0,t)=\mu(t), \qquad u_x(l,t)=\nu(t)$$

特别的，当 $\mu(t)=\nu(t)=0$ 时称之为第二齐次边界条件。

- 第三边界条件 (Robin 边界条件)：

$$\begin{cases} Tu_x(0,t)-k_0u(0,t)=\mu(t) \\ Tu_x(l,t)+k_lu(l,t)=\nu(t) \end{cases}$$

其中 $k_0,k_l,T>0$。特别的，当 $k_0,k_l\gg T$ 时化为第一边界条件；当 $k_0,k_l\ll T$ 时化为第二边界条件。

♣

1.1.3 热传导方程

定义 1.1.3 (热传导方程)

物理问题：在三维空间中，考虑均匀、各向同性的物体 Ω，假设其内部存在热源，且与周围介值存在热交换，研究物体内部温度的分布状态 $u(x,y,z,t)$。

热传导方程为

$$u_t-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=f$$

其中 a 与物体材质有关，f 与热源有关。

1. 初始条件：

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)$$

2. 边界条件：
   - 第一边界条件 (Direchlet 边界条件)：

   $$u(\partial\Omega,t)=\psi(x,y,z,t)$$

   - 第二边界条件 (Neuman 边界条件)：

   $$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=\psi(x,y,z,t)$$

   其中 $\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的外法线方向。

   - 第三边界条件 (Robin 边界条件)：

   $$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+hu\right)\right|_{\partial\Omega}=\psi(x,y,z,t)$$

   其中 $\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的外法线方向。

♣

1.1.4 波动方程

定义 1.1.4 (Poisson 方程)

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=f$$

♣

定义 1.1.5 (Laplace 方程)

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$$

♣

1.2 偏微分方程

定义 1.2.1 (偏微分方程 Partial Defferential Equation, PDE)

关于 n 元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的偏微分方程为

$$\sum_{1\le n_1,\cdots,n_k\le n} a_{n_1,\cdots,n_k}^{(p_{n_1},\cdots,p_{n_k})}(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial^{p_{n_1}+\cdots+p_{n_k}} f}{\partial x_{n_1}^{p_{n_1}}\cdots\partial x_{n_k}^{p_{n_k}}} = b(x_1,\cdots,x_n)$$

♣

定理 1.2.1

$$\begin{aligned} u_{xy}=0 &\iff u(x,y)=f(x)+g(y)\\ u_{xx}=0 &\iff u(x,y)=a(y)x+b(y)\\ u_{yy}=0 &\iff u(x,y)=a(x)y+b(x) \end{aligned}$$

♡

1.3 二阶线性偏微分方程的化简与分类

1.3.1 二元二阶线性偏微分方程的化简

定义 1.3.1 (二元二阶线性偏微分方程)

二元二阶线性偏微分方程如下

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=g$$

其中 a,b,c,d,e,f,g 为关于 x,y 的二元连续可微函数，且 $a^2+b^2+c^2>0$。

♣

引理 1.3.1

如果 $u=\varphi$ 为 PDE

$$au_x^2+2bu_xu_y+cu_y^2=0$$

的解，那么 $\varphi=C$ 为 ODE

$$ay_x^2-2by_x+c=0$$

的通解。

♡

定义 1.3.2 (特征方程)

称 ODE

$$ay_x^2-2by_x+c=0 \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

为 PDE

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=g$$

的特征方程。

♣

定理 1.3.1 (二元二阶线性偏微分方程的分类与化简)

对于二元 2 阶线性偏微分方程如下

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=g$$

其中 a,b,c,d,e,f,g 为关于 x,y 的二元连续可微函数，且 $a^2+b^2+c^2>0$，其分类如下。

1. 双曲型方程 $b^2>ac$：特征方程

$$ay_x^2-2by_x+c=0$$

存在两个实特征解

$$\varphi(x,y)=C_1,\qquad \psi(x,y)=C_2$$

作变量代换

$$\xi=\varphi(x,y),\qquad \eta=\psi(x,y)$$

那么原方程化为**双曲型方程的第一标准型**

$$u_{\xi\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+D$$

进一步，作变量代换

$$\alpha=\xi+\eta,\qquad \beta=\xi-\eta$$

那么原方程化为**双曲型方程的第二标准型**

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=Au_\alpha+Bu_\beta+Cu+D$$

2. 抛物型方程 $b^2=ac$：特征方程

$$ay_x^2-2by_x+c=0$$

仅存在一个实特征解

$$\varphi(x,y)=C$$

任取与 φ 线性无关的函数 ψ，作变量代换

$$\xi=\varphi(x,y),\qquad \eta=\psi(x,y)$$

那么原方程化为**抛物型方程的标准型**

$$u_{\eta\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+D$$

进一步，作变量代换

$$v=u\exp\left(-\frac{1}{2}\int B(\eta,\tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

那么原方程化为**抛物型方程的标准型**

$$v_{\eta\eta}=Au_\xi+Cu+D$$

3. 椭圆型方程 $b^2<ac$：特征方程

$$ay_x^2-2by_x+c=0$$

仅存在复特征解

$$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C_1,\qquad \varphi(x,y)-i\psi(x,y)=C_2$$

作变量代换

$$\xi=\varphi(x,y),\qquad \eta=\psi(x,y)$$

那么原方程化为**椭圆型方程的标准型**

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+D$$

♡

定理 1.3.2 (二元一阶线性偏微分方程的特征线解法)

对于二元一阶线性偏微分方程

$$au_x + bu_y + cu + d = 0$$

其中 a, b, c, d 为关于 x, y 的二元连续可微函数，且 $a^2 + b^2 > 0$，求解其特征方程

$$a\mathrm{d}y - b\mathrm{d}x = 0$$

为

$$y = y(x, C) \iff C = \varphi(x, y)$$

从而得到 ODE

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

解得 $u = u(x, C)$，进而原 PDE 的解为

$$u = u(x, \varphi(x, y))$$

♡

1.3.2 多元二阶线性偏微分方程的化简

定义 1.3.3 (多元二阶线性偏微分方程)

多元二阶线性偏微分方程如下

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu + d = 0$$

其中 $a_{i,j}, b_k, c, d$ 为关于 x, y 的二元连续可微函数，且 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 > 0$。

♣

定理 1.3.3 (多元二阶线性偏微分方程的分类)

对于多元二阶线性偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu + d = 0$$

其中 $a_{i,j}, b_k, c, d$ 为关于 x, y 的二元连续可微函数，且 $a_{ij} = a_{ji}$，同时 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 > 0$，考虑其二次型

$$Q(\boldsymbol{\xi}) = Q(\xi_1, \cdots, \xi_n)^T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j = \begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{\xi}$$

1. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征根同号，那么该方程为椭圆型。
2. 如果 $\boldsymbol{A}$ 存在 $n-1$ 个同号的特征根，1 个异号的特征根，那么该方程为双曲型。
3. 如果 $\boldsymbol{A}$ 存在且存在唯一零特征根，且其余特征根同号，那么该方程为抛物型。

♡

第二章 分离变量法

2.1 Fourier 级数

2.1.1 三角函数的正交性

定理 2.1.1 (三角函数的正交性)

$$\int \cos nx \mathrm{d}x = \begin{cases} x, & n = 0 \\ \dfrac{\sin nx}{n}, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ -\dfrac{\cos nx}{n}, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \begin{cases} x, & m = n = 0 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2nx}{4n}, & |m| = |n| \neq 0 \\ \dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}, & |m| \neq |n| \end{cases}$$

$$\int \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m = n = 0 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2nx}{4n}, & m = n \neq 0 \\ -\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2nx}{4n}, & m = -n \neq 0 \\ \dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}, & |m| \neq |n| \end{cases}$$

$$\int \cos mx \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m = n = 0 \\ -\dfrac{\cos^2 nx}{2n}, & |m| = |n| \neq 0 \\ \dfrac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \dfrac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}, & |m| \neq |n| \end{cases}$$

♡

2.1.1.1 以区间长度为周期的三角函数的正交性

定理 2.1.2 ($[-\pi,\pi]$ 上且以 2π 为周期的三角函数的正交性)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}2\pi, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=0,\qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}2\pi, & m=n=0\\ \pi, & |m|=|n|\neq 0\\ 0, & |m|\neq|n|\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m=n=0\\ \pi, & m=n\neq 0\\ -\pi, & m=-n\neq 0\\ 0, & |m|\neq|n|\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\mathrm{d}x=0,\qquad m,n\in\mathbb{Z}$$

♡

定理 2.1.3 ($[0,a]$ 上且以 a 为周期的三角函数的正交性)

$$\int_{0}^{a}\cos\frac{2n\pi}{a}x\mathrm{d}x=\begin{cases}a, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{0}^{a}\sin\frac{2n\pi}{a}x\mathrm{d}x=0,\qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\int_{0}^{a}\cos\frac{2m\pi}{a}x\cos\frac{2n\pi}{a}x\mathrm{d}x=\begin{cases}a, & m=n=0\\ a/2, & |m|=|n|\neq 0\\ 0, & |m|\neq|n|\end{cases}$$

$$\int_{0}^{a}\sin\frac{2m\pi}{a}x\sin\frac{2n\pi}{a}x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m=n=0\\ a/2, & m=n\neq 0\\ -a/2, & m=-n\neq 0\\ 0, & |m|\neq|n|\end{cases}$$

$$\int_{0}^{a}\cos\frac{2m\pi}{a}x\sin\frac{2n\pi}{a}x\mathrm{d}x=0,\qquad m,n\in\mathbb{Z}$$

♡

定理 2.1.4 ($[a,b]$ 上且以 $b-a$ 为周期的三角函数的正交性)

$$\int_a^b \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} b-a, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

$$\int_a^b \sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = 0, \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\int_a^b \cos\left(\frac{2m\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} b-a, & m=n=0 \\ (b-a)/2, & |m|=|n|\neq 0 \\ 0, & |m|\neq|n| \end{cases}$$

$$\int_a^b \sin\left(\frac{2m\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m=n=0 \\ (b-a)/2, & m=n\neq 0 \\ -(b-a)/2, & m=-n\neq 0 \\ 0, & |m|\neq|n| \end{cases}$$

$$\int_a^b \cos\left(\frac{2m\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = 0, \qquad m,n\in\mathbb{Z}$$

♡

2.1.1.2 以两倍区间长度为周期的三角函数的正交性

定理 2.1.5 ($[0,\pi]$ 上且以 2π 为周期的三角函数的正交性)

$$\int_0^\pi \cos nx\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \sin nx\mathrm{d}x = \begin{cases} 2/n, & 2\nmid n \\ 0, & 2\mid n \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \cos mx\cos nx\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & m=n=0 \\ \pi/2, & |m|=|n|\neq 0 \\ 0, & |m|\neq|n| \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \sin mx\sin nx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m=n=0 \\ \pi/2, & m=n\neq 0 \\ -\pi/2, & m=-n\neq 0 \\ 0, & |m|\neq|n| \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \cos mx\sin nx\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{2n}{m^2-n^2}, & 2\nmid m-n \\ 0, & 2\mid m-n \end{cases}$$

♡

定理 2.1.6 ($[0,a]$ 上且以 $2a$ 为周期的三角函数的正交性)

$$\int_0^a \cos\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x = \begin{cases} a, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x = \begin{cases} 2a/(n\pi), & 2\nmid n \\ 0, & 2\mid n \end{cases}$$

$$\int_0^a \cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x = \begin{cases} a, & m=n=0 \\ a/2, & |m|=|n|\neq 0 \\ 0, & |m|\neq|n| \end{cases}$$

$$\int_0^a \sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m=n=0 \\ a/2, & m=n\neq 0 \\ -a/2, & m=-n\neq 0 \\ 0, & |m|\neq|n| \end{cases}$$

$$\int_0^a \cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{2na}{(m^2-n^2)\pi}, & 2\nmid m-n \\ 0, & 2\mid m-n \end{cases}$$

2.1.2 Fourier 级数

2.1.2.1 以区间长度为周期的 Fourier 级数

定理 2.1.7 ($[-\pi,\pi]$ 上且以 2π 为周期的 Fourier 级数)

$[-\pi,\pi]$ 上的绝对可积函数 $f(x)$ 存在 Fourier 级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

定理 2.1.8 ($[-T,T]$ 上且以 $2T$ 为周期的 Fourier 级数)

$[-T,T]$ 上的绝对可积函数 $f(x)$ 存在 Fourier 级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}x + b_n\sin\frac{n\pi}{T}x\right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\mathrm{d}x$$

定理 2.1.9 ($[0,a]$ 上且以 a 为周期的 Fourier 级数)

$[0,a]$ 上的绝对可积函数 $f(x)$ 存在 Fourier 级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{a}x + b_n\sin\frac{2n\pi}{a}x\right)$$

其中

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{2n\pi}{a}x\mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{2n\pi}{a}x\mathrm{d}x$$

定理 2.1.10 ($[a,b]$ 上且以 $b-a$ 为周期的 **Fourier** 级数)

$[a,b]$ 上的绝对可积函数 $f(x)$ 存在 Fourier 级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right) + b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\right)$$

其中

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x$$

2.1.2.2 以两倍区间长度为周期的 Fourier 级数

定理 2.1.11 ($[0,\pi]$ 上且以 2π 为周期的 **Fourier** 级数)

1. $[0,\pi]$ 上的绝对可积函数 $f(x)$ 存在 Fourier 级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$$

其中

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

2. $[0,\pi]$ 上的绝对可积函数 $f(x)$ 存在 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$$

其中

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

定理 2.1.12 ($[0,a]$ 上且以 $2a$ 为周期的 **Fourier** 级数)

1. $[0,a]$ 上的绝对可积函数 $f(x)$ 存在 Fourier 级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{a}x$$

其中

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x$$

2. $[0,a]$ 上的绝对可积函数 $f(x)$ 存在 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{a}x$$

其中

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x$$

2.2 Sturm-Liouville 问题

定义 2.2.1 (Sturm-Liouville 方程)

Sturm-Liouville 方程为

$$(p(x)y'(x))' - q(x)y(x) + \lambda r(x)y(x) = 0, \qquad a < x < b$$

其中 λ 为未知参数，$p(x) > 0$ 为一阶可微函数，$q(x) \geq 0$ 与 $r(x) > 0$ 为连续函数。♣

定义 2.2.2 (Sturm-Liouville 问题)

称 Sturm-Liouville 方程

$$(p(x)y'(x))' - q(x)y(x) + \lambda r(x)y(x) = 0, \qquad a < x < b$$

与齐次边界条件构成的两点边值问题为 Sturm-Liouville 问题。称使得问题存在非零解的参数 λ 为**特征值**，相应的非零解为**特征函数**。♣

定理 2.2.1 (Sturm-Liouville 问题的解)

Sturm-Liouville 问题的特征值存在且存在可数，同时为非负实数；相应的特征函数系为正交函数系。♡

定理 2.2.2 (特殊 Sturm-Liouville 问题的解)

Sturm-Liouville 问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{*}$$

1. 若 $X(0) = X(l) = 0$，则
$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$
2. 若 $X'(0) = X'(l) = 0$，则
$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}$$
3. 若 $X'(0) = X(l) = 0$，则
$$\lambda_n = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = A_n \cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$
4. 若 $X(0) = X'(l) = 0$，则
$$\lambda_n = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = B_n \sin\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

♡

证明

1. 若 $\lambda > 0$，则线性微分方程 (*) 的特征方程为
$$t^2 + \lambda = 0$$
其解为
$$t_1 = i\sqrt{\lambda}, \qquad t_2 = -i\sqrt{\lambda}$$
因此线性微分方程 (*) 的通解为
$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x), \qquad X'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$$
(a). 若 $X(0) = 0$，则 $A = 0$，因此
$$X(x) = B\sin(\sqrt{\lambda}x), \qquad X'(x) = B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

I. 若 $X(l)=0$，则 $B\sin(\sqrt{\lambda}l)=0$，因此

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

II. 若 $X'(l)=0$，则 $B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l)=0$，因此

$$\lambda_n=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=B_n\sin\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

(b). 若 $X'(0)=0$，则 $B=0$，因此

$$X(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x),\qquad X'(x)=-A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

I. 若 $X(l)=0$，则 $A\cos(\sqrt{\lambda}l)=0$，因此

$$\lambda_n=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=A_n\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

II. 若 $X'(l)=0$，则 $-A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l)=0$，因此

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=A_n\cos\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

2. 若 $\lambda=0$，则线性微分方程 (*) 的特征方程为

$$t^2=0$$

其解为

$$t_1=t_2=0$$

因此线性微分方程 (*) 的通解为

$$X(x)=Ax+B,\qquad X'(x)=A$$

(a). 若 $X(0)=0$，则 $B=0$，因此

$$X(x)=Ax,\qquad X'(x)=A$$

I. 若 $X(l)=0$，则 $Al=0$，因此

$$X(x)=0$$

II. 若 $X'(l)=0$，则 $A=0$，因此

$$X(x)=0$$

(b). 若 $X'(0)=0$，则 $A=0$，因此

$$X(x)=B,\qquad X'(x)=0$$

I. 若 $X(l)=0$，则 $B=0$，因此

$$X(x)=0$$

II. 若 $X'(l)=0$，则 $0=0$，因此

$$X(x)=B$$

3. 若 $\lambda<0$，则线性微分方程 (*) 的特征方程为

$$t^2+\lambda=0$$

其解为

$$t_1=\sqrt{-\lambda},\qquad t_2=-\sqrt{-\lambda}$$

因此线性微分方程 (*) 的通解为

$$X(x)=A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x}+B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x},\qquad X'(x)=A\sqrt{-\lambda}\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x}-B\sqrt{-\lambda}\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

(a). 若 $X(0)=0$，则 $A+B=0$。

I. 若 $X(l)=0$，则 $Ae^{\sqrt{-\lambda}l}+Be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0$。联立方程

$$\begin{cases} A+B=0 \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}l}+Be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \end{cases}$$

解得 $A=B=0$，因此

$$X(x)=0$$

II. 若 $X'(l)=0$，则 $A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l}-B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0$。联立方程

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l}-B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \end{cases}$$

解得 $A=B=0$，因此

$$X(x)=0$$

(b). 若 $X'(0)=0$，则 $A\sqrt{-\lambda}-B\sqrt{-\lambda}=0$。

I. 若 $X(l)=0$，则 $Ae^{\sqrt{-\lambda}l}+Be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0$。联立方程

$$\begin{cases} A\sqrt{-\lambda}-B\sqrt{-\lambda}=0 \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}l}+Be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \end{cases}$$

解得 $A=B=0$，因此

$$X(x)=0$$

II. 若 $X'(l)=0$，则 $A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l}-B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0$。联立方程

$$\begin{cases} A\sqrt{-\lambda}-B\sqrt{-\lambda}=0 \\ A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l}-B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0 \end{cases}$$

解得 $A=B=0$，因此

$$X(x)=0$$

2.3 分离变量法求解弦振动方程与热传导方程

2.3.1 弦振动方程

定理 2.3.1 (弦振动方程)

对于弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le l \\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l \end{cases}$$

求解加之如下边界条件的形式解。

1. $u(0,t)=u(l,t)=0$:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{an\pi}{l}t+\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

2. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$:

$$u(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{an\pi}{l}t+\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

证明

1. 令 $u(x,t)=T(t)X(x)$，代入方程

$$T''(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$$

于是存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得成立

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

即

$$\begin{cases}T''(t)+a^2\lambda T(t)=0\\X''(x)+\lambda X(x)=0\end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\X(0)=X(l)=0\end{cases}$$

由定理2.2.2

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

代入原方程

$$T_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n(t)=0,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

通解为

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

从而原微分方程的解为

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

由迭加原理

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

考虑到初始条件

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

由 Fourier 级数2.1.12

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\qquad B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

从而原微分方程的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{an\pi}{l}t+\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

2. 令 $u(x,t)=T(t)X(x)$，代入方程

$$T''(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$$

于是存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得成立

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

即

$$\begin{cases}T''(t)+a^2\lambda T(t)=0\\X''(x)+\lambda X(x)=0\end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=X'(l)=0 \end{cases}$$

由定理2.2.2

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}$$

代入原方程

$$T_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n(t)=0,\qquad n\in\mathbb{N}$$

通解为

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t,\qquad n\in\mathbb{N}$$

从而原微分方程的解为

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}$$

由迭加原理

$$u(x,t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

考虑到初始条件

$$\varphi(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{l}x,\qquad \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{an\pi}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

由 Fourier 级数2.1.12

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\qquad B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\qquad n\in\mathbb{N}$$

从而原微分方程的形式解为

$$u(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{an\pi}{l}t+\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

2.3.2 热传导方程

定理 2.3.2 (热传导方程)

对于热传导方程

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<l,t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le l \end{cases}$$

求解加之如下边界条件的形式解。

1. $u(0,t)=u(l,t)=0$:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

2. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$:

$$u(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

证明

1. 令 $u(x,t)=T(t)X(x)$，代入方程

$$T'(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$$

于是存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得成立

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

即

$$\begin{cases} T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

由定理2.2.2

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

代入原方程

$$T_n'(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

通解为

$$T_n(t) = C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

从而原微分方程的解为

$$u_n(x,t) = C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

由迭加原理

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

考虑到初始条件

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

由 Fourier 级数2.1.12

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi \mathrm{d}\xi, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

从而原微分方程的形式解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi \mathrm{d}\xi\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

2. 令 $u(x,t) = T(t)X(x)$，代入方程

$$T'(t)X(x) = a^2T(t)X''(x)$$

于是存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得成立

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

即

$$\begin{cases} T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

由定理2.2.2

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}$$

代入原方程

$$T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n(t)=0,\qquad n\in\mathbb{N}$$

通解为

$$T_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t},\qquad n\in\mathbb{N}$$

从而原微分方程的解为

$$u_n(x,t)=C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\cos\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}$$

由迭加原理

$$u(x,t)=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

考虑到初始条件

$$\varphi(x)=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$

由 Fourier 级数2.1.12

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\qquad n\in\mathbb{N}$$

从而原微分方程的形式解为

$$u(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

2.4 弦振动方程

2.4.1 齐次边界条件齐次方程

定理 2.4.1 (齐次边界条件齐次弦振动方程) 齐次边界条件齐次弦振动方程

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l,t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le l\\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\ge 0\end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{an\pi}{l}t+\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

♡

证明 令 $u(x,t)=T(t)X(x)$，代入方程

$$T''(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$$

于是存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得成立

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

即

$$\begin{cases} T''(t)+a^2\lambda T(t)=0 \\ X''(x)+\lambda X(x)=0 \end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

由定理2.2.2

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

代入原方程

$$T_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n(t)=0,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

通解为

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

从而原微分方程的解为

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

由迭加原理

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

考虑到初始条件

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

由 Fourier 级数2.1.9

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi,\qquad B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi$$

从而原微分方程的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{an\pi}{l}t+\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

2.4.2 齐次边界条件方程

2.4.2.1 齐次化原理

定理 2.4.2 (齐次化原理/Duhamel 原理)

如果 $w(x,t;\tau)$ 是混合问题

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx}, & 0<x<l,t>\tau \\ w(x,\tau;\tau)=0, & 0\le x\le l \\ w_t(x,\tau;\tau)=f(x,\tau), & 0\le x\le l \\ w(0,t;\tau)=w(l,t;\tau)=0, & t\ge\tau \end{cases}$$

的解，其中 $t\ge\tau\ge0$ 为参数，且 $f(0,\tau)=f(l,\tau)=0$，那么函数

$$u(x,t)=\int_0^t w(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

是混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

的解。

证明 由于

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

那么

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \int_0^t w_x(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \\ u_{xx}(x,t) &= \int_0^t w_{xx}(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \\ u_t(x,t) &= w(x,t;t) + \int_0^t w_t(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t w_t(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \\ u_{tt}(x,t) &= w_t(x,t;t) + \int_0^t w_{tt}(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = f(x,t) + \int_0^t w_{tt}(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

从而

$$u_{tt}(x,t) = f(x,t) + \int_0^t w_{tt}(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = f(x,t) + a^2\int_0^t w_{xx}(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = f(x,t) + a^2 u_{xx}(x,t)$$

且

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \int_0^0 w(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = 0 \\ u_t(x,0) &= \int_0^t w_t(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = 0 \\ u(0,t) &= \int_0^t w(0,t;\tau)\mathrm{d}\tau = 0 \\ u(l,t) &= \int_0^t w(l,t;\tau)\mathrm{d}\tau = 0 \end{aligned}$$

进而那么函数

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

是混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

的解。

定理 2.4.3 (齐次边界条件弦振动方程)

齐次边界条件弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases} \tag{*}$$

的形式解为

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{an\pi}{l}t+\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \end{aligned}$$

♡

证明 考虑辅助问题

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, & 0 < x < l, t > \tau \\ w(x,\tau;\tau) = 0, & 0 \le x \le l \\ w_t(x,\tau;\tau) = f(x,\tau), & 0 \le x \le l \\ w(0,t;\tau) = w(l,t;\tau) = 0, & t \ge \tau \end{cases} \tag{**}$$

其中 $t \ge \tau \ge 0$ 为参数。令 $s = t - \tau$，那么上述问题化为

$$\begin{cases} w_{ss} = a^2 w_{xx}, & 0 < x < l, s > 0 \\ w(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \\ w_s(x,0) = f(x,\tau), & 0 \le x \le l \\ w(0,s) = w(l,s) = 0, & s \ge 0 \end{cases} \tag{***}$$

由定理2.4.1，问题 (***) 的形式解为

$$w(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}s\sin\frac{n\pi}{l}x$$

从而问题 (**) 的形式解为

$$w(x,t;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

由齐次化原理2.4.2，问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t) = \int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}\tau$$

进而由定理2.4.1与迭加原理，原问题 (*) 的形式解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = &\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{an\pi} \int_0^l f(\xi,\tau) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{an\pi}{l}(t-\tau) \sin \frac{n\pi}{l} x \mathrm{d}\tau \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi \right) \cos \frac{an\pi}{l} t + \left(\frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \\
= &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \left(\frac{2}{an\pi} \int_0^l f(\xi,\tau) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{an\pi}{l}(t-\tau) \mathrm{d}\tau \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi \right) \cos \frac{an\pi}{l} t + \left(\frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x
\end{aligned}
$$

2.4.2.2 特征函数展开法

定理 2.4.4 (齐次边界条件弦振动方程)

齐次边界条件弦振动方程

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\
u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \\
u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l \\
u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \ge 0
\end{cases}
$$

的形式解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \left(\frac{2}{an\pi} \int_0^l f(\xi,\tau) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{an\pi}{l}(t-\tau) \mathrm{d}\tau \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi \right) \cos \frac{an\pi}{l} t + \left(\frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x
\end{aligned}
$$

♡

证明 假设定解问题的形式解为

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x
$$

记

$$
\begin{aligned}
f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \\
\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l} x \\
\psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l} x
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,t) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi \\
\varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi \\
\psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

代入方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n''(t)\sin\frac{n\pi}{l}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2u_n(t)-f_n(t)\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=0$$

于是

$$u_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2u_n(t)-f_n(t)=0,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

由初始条件

$$\varphi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x$$
$$\psi(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(0)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

从而

$$u_n(0)=\varphi_n,\qquad u_n'(0)=\psi_n,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

由常数变易法解得

$$u_n(t)=\varphi_n\cos\frac{an\pi}{l}t+\frac{l}{an\pi}\psi_n\sin\frac{an\pi}{l}t+\frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

进而原定解问题的形式解为

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{an\pi}{l}t+\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\end{aligned}$$

2.4.3 一般方程

定理 2.4.5 (弦振动方程)

求解弦振动方程

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<l,t>0\\u(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le l\\u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l\\u(0,t)=\mu(t), & t\ge 0\\u(l,t)=\nu(t), & t\ge 0\end{cases}$$

♡

证明 令

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

其中

$$w(0,t)=\mu(t),\qquad w(l,t)=\nu(t)$$

不妨令

$$w(x,t)=\frac{\nu(t)-\mu(t)}{l}x+\mu(t)$$

因此 $v(x,t)$ 满足的定解问题为

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx}-\frac{l-x}{l}\mu''(t)-\frac{x}{l}\nu''(t)+f(x,t), & 0<x<l,t>0 \\ v(x,0)=\varphi(x)-\frac{l-x}{l}\mu(0)-\frac{x}{l}\nu(0), & 0\le x\le l \\ v_t(x,0)=\psi(x)-\frac{l-x}{l}\mu'(0)-\frac{x}{l}\nu'(0), & 0\le x\le l \\ v(0,t)=v(l,t)=0, & t\ge 0 \end{cases}$$

表 2.1: 常见非齐次边界条件齐次化所使用辅助函数

非齐次边界条件	齐次化所使用辅助函数
$u(0,t)=\mu(t),u(l,t)=\nu(t)$	$w(x,t)=\frac{\nu(t)-\mu(t)}{l}x+\mu(t)$
$u(0,t)=\mu(t),u_x(l,t)=\nu(t)$	$w(x,t)=\nu(t)x+\mu(t)$
$u_x(0,t)=\mu(t),u(l,t)=\nu(t)$	$w(x,t)=\mu(t)(x-l)+\nu(t)$
$u_x(0,t)=\mu(t),u_x(l,t)=\nu(t)$	$w(x,t)=\frac{\nu(t)-\mu(t)}{2l}x^2+\mu(t)x$

定理 2.4.6

求解弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x), & 0<x<l,t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le l \\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l \\ u(0,t)=A, & t\ge 0 \\ u(l,t)=B, & t\ge 0 \end{cases}$$

♡

证明 取 $w(x)$ 成立

$$\begin{cases} a^2w_{xx}+f(x)=0 \\ w(0)=A \\ w(l)=B \end{cases}$$

令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$，那么

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx}, & 0<x<l,t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x)-w(x), & 0\le x\le l \\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l \\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\ge 0 \end{cases}$$

2.5 热传导方程

2.5.1 齐次边界条件齐次方程

定理 2.5.1 (齐次边界条件齐次热传导方程)

齐次边界条件齐次热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = u(t,l) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

♡

证明 令 $u(x,t) = T(t)X(x)$，代入方程

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

于是存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得成立

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

即

$$\begin{cases} T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

由定理2.2.2

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

代入原方程

$$T_n'(t) + \left(\frac{an\pi}{l} \right)^2 T_n(t) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

通解为

$$T_n(t) = C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

进而原微分方程的解为

$$u_n(x,t) = C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

由迭加原理

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

考虑到初始条件

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

由 Fourier 级数2.1.9

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi$$

从而原微分方程的形式解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

2.5.2 齐次边界条件方程

2.5.2.1 齐次化原理

定理 2.5.2 (齐次化原理/Duhamel 原理)

如果函数 $w(x,t;\tau)$ 是混合问题

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx}, & 0 < x < l, t > \tau \\ w(x,\tau;\tau) = f(x,\tau), & 0 \le x \le l \\ w(0,t;\tau) = w(l,t;\tau) = 0, & t \ge \tau \end{cases}$$

的解，其中 $\tau \ge 0$ 为参数，那么函数

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

是混合问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

的解。

♡

定理 2.5.3 (齐次边界条件热传导方程)

齐次边界条件热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases} \tag{*}$$

的形式解为

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} \sin\frac{n\pi\xi}{l} \sin\frac{n\pi}{l}x \right) f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

♡

证明 考虑混合问题

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx}, & 0 < x < l, t > \tau \\ w(x,\tau;\tau) = f(x,\tau), & 0 \le x \le l \\ w(0,t;\tau) = w(l,t;\tau) = 0, & t \ge \tau \end{cases} \tag{**}$$

其中 $t \ge \tau$ 为参数。令 $s = t - \tau$，那么上述问题化为

$$\begin{cases} w_s = a^2 w_{xx}, & 0 < x < l, s > 0 \\ w(x,0) = f(x,\tau), & 0 \le x \le l \\ w(0,s) = w(l,s) = 0, & t \ge \tau \end{cases}$$

由定理2.5.1，该问题的形式解为

$$w(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,\tau) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 s} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

从而 (**) 的形式解为

$$w(x,t;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,\tau) \sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

因此由齐次化原理2.5.2，原问题 (*) 的形式解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^t w(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t\int_0^l \left(\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

2.5.2.2 特征函数展开法

定理 2.5.4 (齐次边界条件热传导方程)

齐次边界条件热传导方程

$$
\begin{cases}
u_t = a^2u_{xx} + f(x,t), & 0<x<l, t>0 \\
u(x,0)=0, & 0\le x\le l \\
u(0,t)=u(l,t)=0, & t\ge 0
\end{cases}
$$

的形式解为

$$
u(x,t) = \int_0^t\int_0^l \left(\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau
$$

♡

证明 记

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \\
f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x
\end{aligned}
$$

其中

$$
f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi
$$

从而 $u_n(t)$ 成立

$$
\begin{cases}
u_n'(t) = -\left(\frac{an\pi}{l}\right)u_n(t) + f_n(t) \\
u_n(0) = 0
\end{cases}
$$

解得

$$
u_n(t) = \int_0^t f_n(\tau)\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau
$$

由此

$$
u(x,t) = \int_0^t\int_0^l \left(\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau
$$

2.5.3 一般方程

定理 2.5.5 (热传导方程)

求解热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) = \mu(t), & t \geq 0 \\ u(l,t) = \nu(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

♡

证明 令

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

其中

$$w(x,t) = \frac{l-x}{l}\mu(x) + \frac{x}{l}\nu(x)$$

那么 $v(x,t)$ 满足的定解问题为

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t) - \left(\frac{l-x}{l}\mu'(x) + \frac{x}{l}\nu'(x)\right), & 0 < x < l, t > 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) - \left(\frac{l-x}{l}\mu(0) + \frac{x}{l}\nu(0)\right), & 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

表 2.2: 常见非齐次边界条件齐次化所使用辅助函数

非齐次边界条件	齐次化所使用辅助函数
$u(0,t) = \mu(t), u(l,t) = \nu(t)$	$w(x,t) = \frac{\nu(t)-\mu(t)}{l}x + \mu(t)$
$u(0,t) = \mu(t), u_x(l,t) = \nu(t)$	$w(x,t) = \nu(t)x + \mu(t)$
$u_x(0,t) = \mu(t), u(l,t) = \nu(t)$	$w(x,t) = \mu(t)(x-l) + \nu(t)$
$u_x(0,t) = \mu(t), u_x(l,t) = \nu(t)$	$w(x,t) = \frac{\nu(t)-\mu(t)}{2l}x^2 + \mu(t)x$

定理 2.5.6

求解热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - bu, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

♡

证明 令 $u(x,t) = v(x,t)\mathrm{e}^{-bt}$，那么

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ v(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

2.5.4 第三边界条件方程

定理 2.5.7 (第三边界条件热传导方程) 第三边界条件热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \\ u(0,t), & t \ge 0 \\ u_x(l,t) + \sigma u(l,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{v_n \xi}{l} \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{a v_n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

♡

证明 令 $u(x,t) = T(t)X(x)$，代入方程

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t) X''(x)$$

于是存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得成立

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

即

$$\begin{cases} T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

求解 Sturm-Liouville 问题

$$\lambda_n = \frac{v_n^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = \sin \frac{v_n}{l} x, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

代入原方程

$$T_n'(t) + \left(\frac{a v_n}{l} \right)^2 T_n(t) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

通解为

$$T_n(t) = C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{a v_n}{l}\right)^2 t}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

进而原微分方程的解为

$$u_n(x,t) = C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{a v_n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{v_n}{l} x, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

由迭加原理

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{a v_n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{v_n}{l} x$$

考虑到初始条件

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{v_n}{l} x$$

由 Fourier 级数2.1.9

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{v_n \xi}{l} \mathrm{d}\xi$$

从而原微分方程的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{v_n\xi}{l}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{av_n}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

2.6 Laplace 方程

2.6.1 矩形区域上的 Laplace 方程

定理 2.6.1

Laplace 方程

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,0<y<b\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\leq x\leq a\\ u(x,b)=\psi(x), & 0\leq x\leq a\\ u(0,y)=u(a,y)=0, & 0\leq y\leq b\end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{a}y}+B_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}y}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

其中

$$A_n=\frac{\psi_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi b}{a}}-\varphi_n}{\mathrm{e}^{\frac{2n\pi b}{a}}-1},\qquad B_n=\frac{\psi_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi b}{a}}-\varphi_n}{\mathrm{e}^{-\frac{2n\pi b}{a}}-1}$$
$$\varphi_n=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x,\qquad \psi_n=\frac{2}{a}\int_0^a\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x$$

♡

证明 令 $u(x,y)=X(x)Y(y)$，代入方程

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$

于是存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得成立

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ Y''(y)-\lambda Y(y)=0\end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X(0)=X(a)=0\end{cases}$$

由定理2.2.2

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{a^2},\qquad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{a}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

代入原方程

$$Y_n''(y)-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2Y_n(y)=0,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

通解为

$$Y_n(y)=A_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{a}y}+B_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}y},\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

从而原微分方程的解为

$$u_n(x,y)=\left(A_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{a}y}+B_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}y}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

由迭加原理

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{a}y}+B_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}y}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

考虑到 y 的边界条件

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin\frac{n\pi}{a}x,\qquad \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{a}b}+B_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}b}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

由 Fourier 级数2.1.9，记

$$\varphi_n=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x,\qquad \psi_n=\frac{2}{a}\int_0^a\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

由此

$$A_n+B_n=\varphi_n,\qquad A_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{a}b}+B_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}b}=\psi_n,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

解得

$$A_n=\frac{\psi_n\mathrm{e}^{\frac{n\pi b}{a}}-\varphi_n}{\mathrm{e}^{\frac{2n\pi b}{a}}-1},\qquad B_n=\frac{\psi_n\mathrm{e}^{-\frac{n\pi b}{a}}-\varphi_n}{\mathrm{e}^{-\frac{2n\pi b}{a}}-1},\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

进而可得原方程的形式解。

2.6.2 Laplace 方程的 Dirichlet 问题

定理 2.6.2

Laplace 方程

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, & x^2+y^2<a^2\\ u|_{x^2+y^2=a^2}=\varphi(x,y)\end{cases}$$

的形式解为

$$\begin{aligned}u(\rho,\theta)&=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{a^2-\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

其中

$$f(\theta)=\varphi(a\cos\theta,a\sin\theta),\qquad A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\cos n\tau\mathrm{d}\tau,\qquad B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\sin n\tau\mathrm{d}\tau$$

♡

证明 引入极坐标变换

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

那么原方程化为

$$\begin{cases}u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0, & 0<\rho<a\\ u|_{\rho=a}=\varphi(a\cos\theta,a\sin\theta)=f(\theta)\end{cases}$$

分离变量

$$u(\rho,\theta)=R(\rho)\Phi(\theta)$$

代入方程

$$R''(\rho)\Phi(\theta)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)\Phi(\theta)+\frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\theta)=0$$

于是存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得成立

$$\begin{cases}\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0\\ \rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0\end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases}\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0\\ \Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta)\end{cases}$$

求解周期特征值问题

$$\lambda_n=n^2,\qquad \Phi_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,\qquad n\in\mathbb{N}$$

代入原方程

$$\rho^2R_n''(\rho)+\rho R_n'(\rho)-n^2R_n(\rho)=0,\qquad n\in\mathbb{N}$$

通解为

$$R_0(\rho)=C_0+D_0\ln\rho,\qquad R_n(\rho)=C_n\rho^n+D_n\rho^{-n},\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

结合 $|R(0)|<\infty$，可知

$$R_n(\rho)=C_n\rho^n,\qquad n\in\mathbb{N}$$

从而原微分方程的解为

$$u_n(\rho,\theta)=\rho^n\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right),\qquad n\in\mathbb{N}$$

由迭加原理

$$u(\rho,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right)$$

考虑到 ρ 的边界条件

$$f(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right)$$

由 Fourier 级数2.1.7

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\cos n\tau\mathrm{d}\tau,\qquad B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\sin n\tau\mathrm{d}\tau$$

进而可得原方程的形式解

$$\begin{aligned}u(\rho,\theta)&=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\int_0^{2\pi}f(\tau)\left(\cos n\tau\cos n\theta+\sin n\tau\sin n\theta\right)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(\theta-\tau)\right)f(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{a^2-\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

定理 2.6.3

Poisson 方程

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=-4,\qquad x^2+y^2<a^2\\ u|_{x^2+y^2=a^2}=0\end{cases}$$

的特解为

$$u(x,y) = a^2 - (x^2 + y^2)$$

♡

证明 令 $u = v + w$，其中取 w 满足 Laplace 方程，即

$$w_{xx} + w_{yy} = -4$$

不妨取 $w = -(x^2 + y^2)$，那么原方程化为

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & x^2 + y^2 < a^2 \\ v|_{x^2+y^2=a^2} = a^2 \end{cases}$$

容易知道 $v = a^2$，从而原方程的特解为

$$u(x,y) = a^2 - (x^2 + y^2)$$

第三章 积分变换法

3.1 Fourier 变换的理论基础与基本性质

定义 3.1.1 (Fourier 积分)

定义函数 $f(x)$ 的 Fourier 积分为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

其复数形式为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{i\lambda(x-\xi)}\mathrm{d}\xi$$

♣

定理 3.1.1 (Fourier 积分定理)

如果函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续、分段光滑且绝对可积，那么

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

♡

定义 3.1.2 (Fourier 变换)

定义函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换为

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-i\lambda\xi}\mathrm{d}\xi$$

记作 $\mathscr{F}[f]$。

♣

定义 3.1.3 (Fourier 逆变换)

定义函数 $F(\lambda)$ 的 Fourier 逆变换为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

记作 $\mathscr{F}^{-1}[F]$。

♣

定理 3.1.2

如果函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续、分段光滑且绝对可积，那么 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\mathscr{F}[f]$ 存在，且逆变换为 $\mathscr{F}^{-1}[F]$。

♡

定理 3.1.3

$$\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right]=\frac{2\alpha}{\lambda^2+\alpha^2}$$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\sin ax}{x}\right]=\begin{cases}\pi, & |\lambda|<a\\ \pi/2, & |\lambda|=a\\ 0, & |\lambda|>a\end{cases}$$

♡

命题 3.1.1 (Fourier 变换的基本性质)

1. 线性性：Fourier 变换与 Fourier 逆变换为线性变换。
2. 位移性：
$$\mathscr{F}[f(x-b)] = \mathrm{e}^{-i\lambda b}\mathscr{F}[f(x)], \qquad b \in \mathbb{R}$$
3. 相似性：
$$\mathscr{F}[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|}\mathscr{F}[f](\lambda/\alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
4. 微分性：如果 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微且绝对可积，且 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，那么
$$\mathscr{F}[f'] = i\lambda\mathscr{F}[f]$$
5. 积分性：
$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi \mathrm{d}\xi)\right] = \frac{1}{i\lambda}\mathscr{F}[f]$$

定义 3.1.4 (卷积)

定义函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的卷积为
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

命题 3.1.2 (卷积的性质)

1. 交换律：
$$f * g = g * f$$
2. 结合律：
$$f * (g * h) = (f * g) * h$$
3. 分配律：
$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

定理 3.1.4 (卷积的 Fourier 变换)

对于绝对可积的连续函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，成立
$$\mathscr{F}[f * g] = \mathscr{F}[f] \cdot \mathscr{F}[g], \qquad \mathscr{F}[f \cdot g] = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f] * \mathscr{F}[g]$$

3.2 Fourier 变换的应用

3.2.1 热传导方程

3.2.1.1 齐次热传导方程

定理 3.2.1 (齐次热传导方程)

齐次热传导方程
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi$$

♡

证明 将未知函数 $u(x,t)$ 和初始条件 $\varphi(x)$ 关于 x 作 Fourier 变换

$$\mathscr{F}[u(x,t)]=\tilde{u}(\lambda,t),\qquad \mathscr{F}[\varphi(x)]=\tilde{\varphi}(\lambda)$$

对 $u_t=a^2u_{xx}$ 两边关于 x 进行 Fourier 变换，那么

$$\begin{cases}\tilde{u}_t=(i\lambda a)^2\tilde{u}, & \lambda\in\mathbb{R},t>0\\ \tilde{u}(\lambda,0)=\tilde{\varphi}(\lambda), & \lambda\in\mathbb{R}\end{cases}$$

由 $\tilde{u}_t=-(\lambda a)^2\tilde{u}$ 解得

$$\tilde{u}(\lambda,t)=C\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}$$

由初始条件，得

$$\tilde{u}(\lambda,t)=\tilde{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}$$

进而

$$u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}\left[\tilde{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}\right]=\mathscr{F}^{-1}[\tilde{\varphi}(\lambda)]*\mathscr{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}\right]=\varphi(x)*\mathscr{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}\right]$$

而令 $\tilde{\lambda}=\lambda a\sqrt{t},\tilde{y}=\frac{x}{2a\sqrt{t}}$，那么

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}\right]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{i\lambda x-\lambda^2a^2t}\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{1}{2a\pi\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\tilde{\lambda}-i\tilde{y})^2}\mathrm{d}\tilde{\lambda}\\&=\frac{1}{2a\pi\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tilde{\lambda}^2}\mathrm{d}\tilde{\lambda}\\&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\end{aligned}$$

因此原方程的形式解为

$$u(x,t)=\varphi(x)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi$$

3.2.1.2 非齐次热传导方程

定理 3.2.2 (非齐次热传导方程)

非齐次热传导方程

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), & x\in\mathbb{R},t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f((\xi,\tau))}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\xi$$

♡

证明 （Fourier 变换法）关于 x 作 Fourier 变换

$$\mathscr{F}[u(x,t)]=\tilde{u}(\lambda,t),\qquad \mathscr{F}[f(x,t)]=\tilde{f}(\lambda,t),\qquad \mathscr{F}[\varphi(x)]=\tilde{\varphi}(\lambda)$$

对 $u_t = a^2 u_{xx}$ 两边关于 x 进行 Fourier 变换，那么

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = (i\lambda a)^2 \tilde{u} + \tilde{f}(\lambda, t), & \lambda \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi}(\lambda), & \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

解得

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \int_0^t \tilde{f}(\lambda, \tau) \mathrm{e}^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \mathrm{d}\tau + \tilde{\varphi}(\lambda) \mathrm{e}^{-\lambda^2 a^2 t}$$

进而

$$u(x, t) = \mathscr{F}^{-1} \left[\int_0^t \tilde{f}(\lambda, \tau) \mathrm{e}^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \mathrm{d}\tau \right] + \mathscr{F}^{-1} \left[\tilde{\varphi}(\lambda) \mathrm{e}^{-\lambda^2 a^2 t} \right]$$

由于

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^{-1} \left[\int_0^t \tilde{f}(\lambda, \tau) \mathrm{e}^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \mathrm{d}\tau \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \tilde{f}(\lambda, \tau) \mathrm{e}^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{e}^{i\lambda x} \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^t \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda, \tau) \mathrm{e}^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \right) \mathrm{e}^{i\lambda x} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \mathscr{F}^{-1} \left[\tilde{f}(\lambda, \tau) \mathrm{e}^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \right] \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \left(f(\lambda, \tau) * \mathscr{F}^{-1} \left[\mathrm{e}^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \right] \right) \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \left(f(\lambda, \tau) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} f(\xi, \tau) \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

从而原方程的形式解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f((\xi, \tau))}{\sqrt{t-\tau}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\xi$$

（齐次化原理）令 $u = w + v$，其中

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}, \qquad \begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

那么

$$w(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi$$

由齐次化原理，设 $\omega(x, t; \tau)$ 成立

$$\begin{cases} \omega_t = a^2 \omega_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > \tau \\ \omega(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

即

$$\omega(x, t; \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau) \mathrm{d}\xi$$

那么

$$v(x, t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau) \mathrm{d}\xi$$

从而原方程的形式解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f((\xi, \tau))}{\sqrt{t-\tau}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\xi$$

例题 3.1 齐次热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ c, & x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right)$$

其中误差函数

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

例题 3.2 非齐次热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + A, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \sin 3x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-9a^2 t}\sin 3t + At$$

3.2.1.3 半无界问题

引理 3.2.1

对于齐次热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

如果 $\varphi(x)$ 为奇、偶、周期函数，那么 $u(x,t)$ 关于 x 为奇、偶、周期函数。

♡

定理 3.2.3 (半无界齐次热传导方程)

齐次热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\mathrm{d}\xi$$

♡

证明 由于 $u(0,t) = 0$ 为奇函数，那么由引理3.2.1，将 $u(x,t)$ 关于 x 奇延拓为 $U(x,t)$，$\varphi(x)$ 奇延拓为 $\Phi(x)$，从而原问题的形式解为

$$u(x,t) = U(x,t)\Big|_{x>0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)\left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}}\right)\mathrm{d}\xi$$

3.2.1.4 三维热传导方程

定理 3.2.4 (三维齐次热传导方程)

三维齐次热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0 \\ u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,y,z,t)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

♡

证明 作 Fourier 变换

$$\mathscr{F}[u]=\tilde{u}(\lambda,\mu,\nu,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y,z,t)\mathrm{e}^{-(\lambda x+\mu y+\nu z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\mathscr{F}[\varphi]=\tilde{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y,z)\mathrm{e}^{-(\lambda x+\mu y+\nu z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

代入方程

$$\begin{cases} \tilde{u}_t=-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\tilde{u}, & (\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3, t>0 \\ \tilde{u}(x,y,z,0)=\tilde{\varphi}(x,y,z), & (\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

解得

$$\tilde{u}(\lambda,\mu,\nu,t)=\tilde{\varphi}(\lambda,\mu,\nu)\mathrm{e}^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}$$

从而

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t)&=\varphi(x,y,z)*\mathscr{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t}\right] \\ &=\varphi(x,y,z)*\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}} \\ &=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

3.2.2 波动方程

3.2.2.1 齐次波动方程

定理 3.2.5 (齐次波动方程)

齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

♡

证明 将未知函数 $u(x,t)$ 和初始条件 $\varphi(x),\psi(x)$ 关于 x 作 Fourier 变换

$$\mathscr{F}[u(x,t)]=\tilde{u}(\lambda,t),\qquad \mathscr{F}[\varphi(x)]=\tilde{\varphi}(\lambda),\qquad \mathscr{F}[\psi(x)]=\tilde{\psi}(\lambda)$$

对原方程关于 x 进行 Fourier 变换，那么

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = -a^2\lambda^2\tilde{u}, & \lambda \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi}(\lambda), & \lambda \in \mathbb{R} \\ \tilde{u}_t(\lambda, 0) = \tilde{\psi}(\lambda), & \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

解得

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}(\lambda)(\mathrm{e}^{i\lambda at} + \mathrm{e}^{-i\lambda at}) + \frac{1}{2i\lambda a}\tilde{\psi}(\lambda)(\mathrm{e}^{i\lambda at} - \mathrm{e}^{-i\lambda at})$$

进而

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(\lambda)(\mathrm{e}^{i\lambda at} + \mathrm{e}^{-i\lambda at}) + \frac{1}{2i\lambda a}\tilde{\psi}(\lambda)(\mathrm{e}^{i\lambda at} - \mathrm{e}^{-i\lambda at})\right] \\ &= \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

3.2.2.2 非齐次波动方程

定理 3.2.6 (非齐次波动方程)

非齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\mathrm{d}\xi$$

♡

证明 由齐次化原理，若 $w = w(x, t; \tau)$ 为

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > \tau \\ w(x, \tau) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ w_t(x, \tau) = f(x, \tau), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的解，那么

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t; \tau)\mathrm{d}\tau$$

为

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

由齐次波动方程3.2.5

$$w(x, t; \tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\mathrm{d}\xi$$

因此

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$$

进而原问题的形式解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$$

3.2.2.3 半无界问题

引理 3.2.2

对于齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}\\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

如果 $\varphi(x),\psi(x)$ 为奇、偶、周期函数，那么 $u(x,t)$ 关于 x 为奇、偶、周期函数。

定理 3.2.7 (半无界齐次波动方程)

齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x>0, t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\geq 0\\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\geq 0\\ u(0,t)=0, & t\geq 0\end{cases}$$

的形式奇函数解为

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & x-at\geq 0\\ \frac{1}{2}(\varphi(x+at)-\varphi(at-x))+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & x-at<0\end{cases}$$

形式偶函数解为

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & x-at\geq 0\\ \frac{1}{2}(\varphi(x+at)-\varphi(at-x))+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right), & x-at<0\end{cases}$$

证明 奇延拓：由于 $u(0,t)=0$ 为奇函数，那么由引理3.2.2，将 $u(x,t)$ 关于 x 奇延拓为 $U(x,t)$，$\varphi(x)$ 奇延拓为 $\Phi(x)$，$\psi(x)$ 奇延拓为 $\Psi(x)$，从而原问题的形式解为

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & x-at\geq 0\\ \frac{1}{2}(\varphi(x+at)-\varphi(at-x))+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & x-at<0\end{cases}$$

偶延拓：由于 $u(0,t)=0$ 为偶函数，那么由引理3.2.2，将 $u(x,t)$ 关于 x 偶延拓为 $U(x,t)$，$\varphi(x)$ 偶延拓为 $\Phi(x)$，$\psi(x)$ 偶延拓为 $\Psi(x)$，从而原问题的形式解为

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & x-at\geq 0\\ \frac{1}{2}(\varphi(x+at)-\varphi(at-x))+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right), & x-at<0\end{cases}$$

定理 3.2.8 (半无界非齐次波动方程)

非齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & x>0,t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\geq 0\\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\geq 0\\ u(0,t)=0, & t\geq 0\end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ +\frac{1}{2a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi, & x-at\geq 0\\ \frac{1}{2}(\varphi(x+at)-\varphi(at-x))+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ +\frac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}}\mathrm{d}\tau\int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi, & x-at<0\end{cases}$$

♡

证明 由于 $u(0,t)=0$ 为奇函数，那么由引理3.2.2，将 $u(x,t)$ 关于 x 奇延拓为 $U(x,t)$，$f(x,t)$ 关于 x 奇延拓为 $F(x,t)$，$\varphi(x)$ 奇延拓为 $\Phi(x)$，$\psi(x)$ 奇延拓为 $\Psi(x)$，从而原问题的形式解为

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ +\frac{1}{2a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi, & x-at\geq 0\\ \frac{1}{2}(\varphi(x+at)-\varphi(at-x))+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ +\frac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}}\mathrm{d}\tau\int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi, & x-at<0\end{cases}$$

3.2.3 Laplace 方程

定理 3.2.9

上半平面上的静电场电势问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in\mathbb{R},y>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}\\ \lim\limits_{x^2+y^2\to\infty}u(x,y)=0\end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\mathrm{d}\xi$$

♡

证明 将未知函数 $u(x,y)$ 和初始条件 $\varphi(x)$ 关于 x 作 Fourier 变换

$$\mathscr{F}[u(x,y)]=\tilde{u}(\lambda,y),\qquad \mathscr{F}[\varphi(x)]=\tilde{\varphi}(\lambda)$$

对原方程关于 x 进行 Fourier 变换，那么

$$\begin{cases} -\lambda^2\tilde{u}+\tilde{u}_{yy}=0, & \lambda\in\mathbb{R},y>0\\ \tilde{u}(\lambda,0)=\tilde{\varphi}(\lambda), & \lambda\in\mathbb{R}\\ \lim\limits_{y\to\infty}\tilde{u}(\lambda,y)=0\end{cases}$$

解得

$$\tilde{u}(\lambda, y) = \tilde{(\varphi)}(\lambda)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}$$

进而

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathscr{F}^{-1}\left[\tilde{(\varphi)}(\lambda)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}\right] \\
&= \varphi(x) * \mathscr{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-|\lambda|y}\right] \\
&= \varphi(x) * \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

3.3 Laplace 变换的引入与应用

3.3.1 Laplace 变换的引入

定义 3.3.1 (Laplace 变换)

对于 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(t)$，定义其 Laplace 变换为

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \qquad p \in \mathbb{C}$$

记作 $\mathscr{L}[f(t)]$。

♣

定理 3.3.1 (Laplace 变换存在的充分条件)

如果 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(t)$ 成立如下条件：

1. 当 $t < 0$ 时，$f(t) = 0$；
2. 当 $t \geq 0$ 时，$f(t)$ 连续，$f'(t)$ 分段连续。
3. 存在 $M > 0$ 与 $\alpha \geq 0$，以及 $T \geq 0$，使得当 $t \geq T$ 时，成立

$$|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha t}$$

那么 $f(t)$ 的 Laplace 变换

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \qquad p \in \mathbb{C}$$

对于 $\mathrm{Re}(p) > \alpha$ 存在。

♡

定理 3.3.2 (初等函数的 Laplace 变换)

1. 常值函数：

$$\mathscr{L}[c] = \frac{c}{p}, \qquad \mathrm{Re}(p) > 0$$

2. 指数函数：

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{\alpha t}] = \frac{1}{p-\alpha}, \qquad \mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(\alpha)$$

3. 三角函数：

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\cos\omega t] &= \frac{p}{p^2+\omega^2}, \qquad \mathrm{Re}(p) > 0 \\
\mathscr{L}[\sin\omega t] &= \frac{p}{p^2+\omega^2}, \qquad \mathrm{Re}(p) > 0
\end{aligned}$$

4. 幂函数：

$$\mathscr{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad \mathrm{Re}(p) > 0$$

♡

定理 3.3.3 (Laplace 变换的性质)

1. 线性性：

$$\mathscr{L}[f(t)+g(t)] = \mathscr{L}[f(t)] + \mathscr{L}[g(t)], \qquad \mathscr{L}[\lambda f(t)] = \lambda\mathscr{L}[f(t)]$$

2. 位移性：

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)] = F(p-a), \qquad \mathrm{Re}(p) > a$$

3. 延迟性：

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)] = \mathrm{e}^{-p\tau}\mathscr{L}[f(t)], \qquad t \geq \tau$$

4. 相似性：

$$\mathscr{L}[f(ct)] = \frac{1}{c}F\left(\frac{p}{c}\right)$$

5. 微分性：

$$\mathscr{L}[f'(t)] = p\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$$

   进而

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = p^n\mathscr{L}[f(t)] - (p^{n-1}f(0) + \cdots + pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0))$$

6. 卷积性：

$$\mathscr{L}[f(t)*g(t)] = \mathscr{L}[f(t)]\cdot\mathscr{L}[g(t)]$$

♡

3.3.2 Laplace 变换的应用

例题 3.3 求解半无限长细杆的热传导定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + hu, & x>0, t>0 \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0,t) = u_0, & t \geq 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

证明 对方程和定解条件关于 t 进行 Laplace 变换

$$\tilde{u}(x,p) = \mathscr{L}[u(x,t)]$$

那么

$$\begin{cases} p\tilde{u} = a^2\tilde{u}_{xx} - h\tilde{u} \\ \tilde{u}(0,p) = \frac{u_0}{p} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{u}(x,p) = 0 \end{cases}$$

解得

$$\tilde{u}(x,p) = \frac{u_0}{p}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x}$$

进而

$$u(x,t) = \frac{xu_0}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}-h\tau}\mathrm{d}\tau$$

例题 3.4 求解定解问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin \pi x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

证明 对方程和定解条件关于 t 进行 Laplace 变换

$$\tilde{u}(x,p) = \mathscr{L}[u(x,t)]$$

那么

$$\begin{cases} p\tilde{u} - \sin \pi x = \tilde{u}_{xx} \\ \tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(1,t) = 0 \end{cases}$$

解得

$$\tilde{u}(x,p) = \frac{\sin \pi x}{p + \pi^2}$$

进而

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$

例题 3.5 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + b, & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u_x(x,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

证明 对方程和定解条件关于 t 进行 Laplace 变换

$$\tilde{u}(x,p) = \mathscr{L}[u(x,t)]$$

那么

$$\begin{cases} p^2\tilde{u} = a^2\tilde{u}_{xx} + \frac{b}{p} \\ \tilde{u}(0,t) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \tilde{u}_x(x,t) = 0 \end{cases}$$

解得

$$\tilde{u}(x,p) = \frac{b}{p^3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{p}{a}x}\right)$$

进而

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{b}{2}t^2, & 0 < t \leq \frac{x}{a} \\ \frac{b}{2}\left(t^2 - \left(t - \frac{x}{a}\right)^2\right), & t > \frac{x}{a} \end{cases}$$

第四章 波动方程

4.1 一维波动方程的特征线法

4.1.1 齐次波动方程

定理 4.1.1 (齐次波动方程)

齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

♡

证明 作特征变换

$$\xi = x + at, \qquad \eta = x - at$$

则方程化为

$$u_{\xi\eta} = 0$$

解得

$$u(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

其中 F, G 为任意二阶连续可微函数，进而原方程通解为

$$u(x,t) = F(x+at) + G(x-at)$$

由初始条件

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + C$$
$$G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi - C$$

从而原方程的形式解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

4.1.2 齐次波动方程解的性质

定理 4.1.2 (解的存在性定理)

对于齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

如果 φ 为二阶连续可微函数，ψ 为一阶连续可微函数，那么 D'Alembert 公式

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

为原方程的解。

定理 4.1.3 (解的唯一性定理)

对于齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

如果存在解，那么解存在唯一。

定理 4.1.4 (解的稳定性定理)

对于齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

如果存在解，那么解具有稳定性；换言之，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得成立

$$|\varphi|<\delta, |\psi|<\delta \implies |u|<\varepsilon$$

4.1.3 齐次波动方程的广义解

定义 4.1.1 (广义解)

对于函数空间 $(\mathscr{F}, \|\cdot\|)$，以及齐次弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

其中 $\varphi,\psi\in\mathscr{F}$，记 $\{\varphi_n,\psi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{F}$ 对应的齐次弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=\varphi_n(x), & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=\psi_n(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

的解为 u_n，若在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 中内闭成立

$$\|\varphi_n-\varphi\|\to 0, \qquad \|\psi_n-\psi\|\to 0$$

则存在 $u\in\mathscr{F}$，使得在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 中内闭成立

$$\|u_n-u\|\to 0$$

称 u 为原方程的广义解。

4.1.4 D'Alembert 公式的物理意义

定义 4.1.2 (D'Alembert 公式)

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

♣

定义 4.1.3 (依赖区间)

对于齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R},t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

解 $u(x,t)$ 在点 (x,t) 处的值由闭区间 $[x-at,x+at]$ 对应的初值决定，称闭区间 $[x-at,x+at]$ 为点 (x,t) 的依赖区间。 ♣

定义 4.1.4 (决定区域)

对于齐次波方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R},t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

解在

$$D_1=\{(x,t):x_1+at\le x\le x_2-at,t\ge 0\}$$

中的值只依赖于区间 $[x_1,x_2]$ 上的初值，称区域 D_1 为区间 $[x_1,x_2]$ 的决定区域。 ♣

定义 4.1.5 (影响区域)

对于齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R},t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

区间 $[x_1,x_2]$ 上的初值可以影响区域

$$D_2=\{(x,t):x_1-at\le x\le x_2+at,t\ge 0\}$$

点 x_0 的初值可以影响区域

$$D_3=\{(x,t):x_0-at\le x\le x_0+at,t\ge 0\}$$

称区域 D_2 为区间 $[x_1,x_2]$ 的影响区域，区域 D_3 为区间 x_0 的影响区域。 ♣

4.1.5 D'Alembert 公式的进一步思考

对于齐次弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R},t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

以 $(\varphi,0)$ 为初值的问题的解为

$$u(\varphi,0)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))$$

以 $(0,\varphi)$ 为初值的问题的解为

$$u(0,\varphi)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

那么

$$\frac{\partial}{\partial t}u(0,\varphi)=u(\varphi,0)$$

因此

$$u(x,t)=u(\varphi,0)+u(0,\psi)=u_t(0,\varphi)+u(0,\psi)$$

4.2 三维波动方程的球面平均法

4.2.1 齐次波动方程

定义 4.2.1 (球面平均)

定义函数 h 在点 $P(x,y,z)$ 处，以 r 为半径的球面平均值为

$$\overline{h}(P,r)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{\partial B_r(P)}h\mathrm{d}S$$

换言之

$$\overline{h}(x,y,z,r)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}h(x+r\sin\theta\cos\varphi,\eta=y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

♣

证明 对于 $(\xi,\eta,\zeta)\in\partial B_r(P)$ 作换元

$$\xi=x+r\sin\theta\cos\varphi,\qquad \eta=y+r\sin\theta\sin\varphi,\qquad \zeta=z+r\cos\theta$$

那么

$$E=\xi_\theta^2+\eta_\theta^2+\zeta_\theta^2=r^2,\qquad F=\xi_\theta\xi_\varphi+\eta_\theta\eta_\varphi+\zeta_\theta\zeta_\varphi=0,\qquad G=\xi_\varphi^2+\eta_\varphi^2+\zeta_\varphi^2=r^2\sin^2\theta$$

因此

$$\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

因此

$$\begin{aligned}\overline{h}(x,y,y,r)&=\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}h(x+r\sin\theta\cos\varphi,\eta=y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta)r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}h(x+r\sin\theta\cos\varphi,\eta=y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

定理 4.2.1 (三维波动方程)

三维波动方程

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,t>0\\u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\\u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\end{cases}$$

的形式解为

$$u(P,t)=\frac{\partial}{\partial t}(t\overline{\varphi}(P,at))+t\overline{\psi}(P,at)$$

换言之

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) =& \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\varphi(x+at\sin\theta\cos\varphi, y+at\sin\theta\sin\varphi, z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right) \\
&+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\psi(x+at\sin\theta\cos\varphi, y+at\sin\theta\sin\varphi, z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

♡

证明 任取一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，对于波动方程的两边同时在球 $B_r(P)$ 上积分，则

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= \iiint\limits_{B_r(P)} u_{tt}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint\limits_{B_r(P)} u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r \rho^2\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}u(x_0+\rho\sin\theta\cos\varphi, y_0+\rho\sin\theta\sin\varphi, z_0+\rho\cos\theta, t)\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
\text{RHS} &= \iiint\limits_{B_r(P)} a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= a^2\iiint\limits_{B_r(P)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= a^2\iint\limits_{\partial B_r(P)} u_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+u_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+u_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= a^2\iint\limits_{\partial B_r(P)} \nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= a^2r^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial r}u(x_0+r\sin\theta\cos\varphi, y_0+r\sin\theta\sin\varphi, z_0+r\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 4\pi a^2r^2\frac{\partial}{\partial r}\overline{u} \\
&= 4\pi a^2r^2\overline{u}_r
\end{aligned}
$$

两边再对 t 求导

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= r^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}u(x_0+r\sin\theta\cos\varphi, y_0+r\sin\theta\sin\varphi, z_0+r\cos\theta, t)\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 4\pi r^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{u} \\
&= 4\pi r^2\overline{u}_{tt} \\
\text{RHS} &= 4\pi a^2\frac{\partial}{\partial r}r^2\overline{u}_r \\
&= 4\pi a^2 r(r\overline{u})_{rr}
\end{aligned}
$$

因此 $r\overline{u}_{tt}=a^2(r\overline{u})_{rr}$。记 $V=r\overline{u}$，则 $V_{tt}=a^2V_{rr}$。显然

$$
V|_{r=0}=0,\qquad V|_{t=0}=r\overline{\varphi},\qquad V_t|_{t=0}=r\overline{\psi}
$$

从而

$$
\begin{cases}
V_{tt}=a^2V_{rr}, & r>0,t>0 \\
V|_{r=0}=0, & t\geq 0 \\
V|_{t=0}=r\overline{\varphi}, & t\geq 0 \\
V_t|_{t=0}=r\overline{\psi}, & t\geq 0
\end{cases}
$$

由 D'Alembert 公式4.1.2

$$V=\begin{cases}\frac{1}{2}\left((r+at)\overline{\varphi}(P,r+at)+(r-at)\overline{\varphi}(P,r-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at}\xi\overline{\psi}(P,\xi)\mathrm{d}\xi, & r-at\geq 0\\ \frac{1}{2}\left((r+at)\overline{\varphi}(P,r+at)-(at-r)\overline{\varphi}(P,at-r)\right)+\frac{1}{2a}\int_{at-r}^{r+at}\xi\overline{\psi}(P,\xi)\mathrm{d}\xi, & r-at<0\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}u(P,t)&=\lim_{r\to 0}\overline{u}\\&=\lim_{r\to 0}\frac{V}{r}\\&=\lim_{r\to 0}\frac{(r+at)\overline{\varphi}(P,r+at)-(at-r)\overline{\varphi}(P,at-r)}{2r}+\lim_{r\to 0}\frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{r+at}\xi\overline{\psi}(P,\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left(t\overline{\varphi}(P,at)\right)+t\overline{\psi}(P,at)\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi r^2}\iint\limits_{\partial B_{at}(P)}\varphi\mathrm{d}S\right)+\frac{t}{4\pi r^2}\iint\limits_{\partial B_{at}(P)}\psi\mathrm{d}S\end{aligned}$$

进而原方程的形式解为

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)=&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\varphi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\psi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

定义 4.2.2 (Poisson 公式)

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)=&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\varphi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\psi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

♣

4.2.2 非齐次波动方程

定理 4.2.2 (三维波动方程)

三维波动方程

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z,t), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,t>0\\ u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\\ u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\end{cases}\tag{*}$$

的形式解为

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)=&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\varphi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\psi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&+\int_0^t\frac{t-\tau}{4\pi}\mathrm{d}\tau\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}f(x+a(t-\tau)\sin\theta\cos\varphi,y+a(t-\tau)\sin\theta\sin\varphi,z+a(t-\tau)\cos\theta,\tau)\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

♡

证明 设三维波动方程

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > \tau \\ w(x, y, z, \tau) = 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ w_t(x, y, z, \tau) = f(x, y, z, \tau), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{**}$$

的解为 $w(x, y, z, t; \tau)$，那么由齐次化原理，三维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, y, z, 0) = 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x, y, z, 0) = 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{***}$$

的解为

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t w(x, y, z, t; \tau)\mathrm{d}\tau$$

考察三维波动方程 (**)，令 $s = t - \tau$，则

$$\begin{cases} w_{ss} = a^2(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, s > 0 \\ w(x, y, z, 0) = 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ w_t(x, y, z, 0) = f(x, y, z, 0), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{4.1}$$

从而由 Poisson 公式4.2.2

$$w(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} f(x + as\sin\theta\cos\varphi, y + as\sin\theta\sin\varphi, z + as\cos\theta, 0)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

因此

$$w(x, y, z, t; \tau) = \frac{t-\tau}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} f(x + a(t-\tau)\sin\theta\cos\varphi, y + a(t-\tau)\sin\theta\sin\varphi, z + a(t-\tau)\cos\theta, \tau)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

由齐次化原理三维波动方程 (***) 的解为

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t \frac{t-\tau}{4\pi}\mathrm{d}\tau \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} f(x + a(t-\tau)\sin\theta\cos\varphi, y + a(t-\tau)\sin\theta\sin\varphi, z + a(t-\tau)\cos\theta, \tau)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

进而原三维波动方程 (*) 的形式解为

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) =& \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\varphi(x + at\sin\theta\cos\varphi, y + at\sin\theta\sin\varphi, z + at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right) \\ &+ \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\psi(x + at\sin\theta\cos\varphi, y + at\sin\theta\sin\varphi, z + at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &+ \int_0^t \frac{t-\tau}{4\pi}\mathrm{d}\tau\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi} f(x + a(t-\tau)\sin\theta\cos\varphi, y + a(t-\tau)\sin\theta\sin\varphi, z + a(t-\tau)\cos\theta, \tau)\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

4.2.3 依赖区域、决定区域、影响区域

定义 4.2.3 (依赖区域)

对于齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

称球面

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(at_0)^2$$

为点 (x_0,y_0,z_0,t_0) 的依赖区域。♣

定义 4.2.4 (决定区域)

对于齐次波方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0 \\ u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \\ u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

称特征锥

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le a^2(t_0-t)^2,\qquad t_0\ge t$$

为球域

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le (at_0)^2,\qquad t=0$$

的决定区域。♣

定义 4.2.5 (影响区域)

对于齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0 \\ u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \\ u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

点 $(x_0,y_0,z_0,0)$ 的影响区域为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(at)^2,\qquad t\ge 0$$

♣

4.3 二维波动方程的降维法

4.3.1 齐次波动方程

定理 4.3.1 (二维波动方程)

二维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}), & (x,y)\in\mathbb{R}^2, t>0 \\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$$

的形式解为

$$\begin{aligned} u(x,y,t)=&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+\rho\cos\theta,y+\rho\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}\mathrm{d}\theta\right) \\ &+\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x+\rho\cos\theta,y+\rho\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

♡

证明 将 $\mathbb{R}^2$ 看作 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，由 Poisson 公式4.2.2，三维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0 \\ u(x,y,z,0)=\Phi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \\ u_t(x,y,z,0)=\Psi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的形式解为

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t)=&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\Phi(x+at\sin\theta\cos\varphi, y+at\sin\theta\sin\varphi, z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right) \\ &+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\Psi(x+at\sin\theta\cos\varphi, y+at\sin\theta\sin\varphi, z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

因此原二维波动方程的形式解为

$$\begin{aligned} u(x,y,t)=&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+\rho\cos\theta, y+\rho\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}\mathrm{d}\theta\right) \\ &+\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x+\rho\cos\theta, y+\rho\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

4.3.2 非齐次波动方程

定理 4.3.2 (二维波动方程)

二维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t), & (x,y)\in\mathbb{R}^2, t>0 \\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$$

的形式解为

$$\begin{aligned} u(x,y,t)=&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+\rho\cos\theta, y+\rho\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}\mathrm{d}\theta\right) \\ &+\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x+\rho\cos\theta, y+\rho\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}\mathrm{d}\theta \\ &+\frac{1}{2\pi a}\int_0^{t}\mathrm{d}\tau\int_0^{a(t-\tau)}\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\frac{f(x+\rho\cos\theta, y+\rho\sin\theta, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

♡

4.3.3 依赖区域、决定区域、影响区域

定义 4.3.1 (依赖区域)

对于齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}), & (x,y)\in\mathbb{R}^2, t>0 \\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$$

称圆域

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq(at_0)^2$$

为点 (x_0,y_0,t_0) 的依赖区域。

♣

定义 4.3.2 (决定区域)

对于齐次波方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,y,0) = \psi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

称特征锥体

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq a^2(t_0-t)^2, \qquad t_0 \geq t$$

为圆域

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq (at_0)^2$$

的决定区域。

♣

定义 4.3.3 (影响区域)

对于齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,y,0) = \psi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

点 $(x_0, y_0, 0)$ 的影响区域为

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq (at)^2, \qquad t \geq 0$$

♣

4.4 能量积分

4.4.1 能量不等式

引理 4.4.1 (Gronwall 不等式)

如果函数 $G(x)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}G(x)}{\mathrm{d}x} \leq A(x) + cG(x)$$

其中 $A(x)$ 为非负单调递增函数，$c > 0$ 为常数，那么成立 Gronwall 不等式

$$G(x) \leq G(0)\mathrm{e}^{cx} + \frac{\mathrm{e}^{cx}-1}{c}A(x)$$

♡

证明 不等式两边乘以 e^{-cx}，成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-cx}G(x)\right) \leq \mathrm{e}^{-cx}A(x)$$

从 0 到 x 积分，成立

$$\mathrm{e}^{-cx}G(x) - G(0) \leq \int_0^x \mathrm{e}^{-ct}A(t)\mathrm{d}t$$

由 $A(x)$ 的单调性

$$G(x) \leq \mathrm{e}^{cx}\left(G(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{-ct}A(t)\mathrm{d}t\right) \leq \mathrm{e}^{cx}\left(G(0) + A(x)\int_0^x \mathrm{e}^{-ct}\mathrm{d}t\right) = G(0)\mathrm{e}^{cx} + \frac{\mathrm{e}^{cx}-1}{c}A(x)$$

引理 4.4.2 (能量不等式)

对于区域

$$\Omega:(x,y)\in\mathbb{R}^2,t>0$$

如果在 Ω 上的二阶连续可微、在 $\overline{\Omega}$ 上一阶连续可微的函数 u 为二维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t), & \Omega:(x,y)\in\mathbb{R}^2,t>0 \\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$$

的解，那么成立能量不等式

$$\iint\limits_{\Omega_\tau}\left(u_t^2+a^2\left(u_x^2+u_y^2\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq M\left(\iint\limits_{\Omega_0}\left(u_t^2+a^2\left(u_x^2+u_y^2\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^\tau\mathrm{d}t\iint\limits_{\Omega_\tau}f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

其中

$$(x_0,y_0,t_0)\in\Omega,\qquad M=4\max\{1,t_0\},\qquad 0\leq\tau\leq t_0$$

$$\Omega_\tau:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2(\tau-t_0)^2,\qquad \Omega_0:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2t_0^2$$

定理 4.4.1 (波动方程解的唯一性)

二维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t), & \Omega:(x,y)\in\mathbb{R}^2,t>0 \\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$$

的解存在且存在唯一。

证明 如果方程存在两个解 u_1,u_2，那么 $u=u_1-u_2$ 为二维齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}), & \Omega:(x,y)\in\mathbb{R}^2,t>0 \\ u(x,y,0)=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ u_t(x,y,0)=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$$

的解。由能量不等式4.4.2

$$\iint\limits_{\Omega_\tau}\left(u_t^2+a^2\left(u_x^2+u_y^2\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq M\left(\iint\limits_{\Omega_0}\left(u_t^2+a^2\left(u_x^2+u_y^2\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

其中

$$(x_0,y_0,t_0)\in\Omega,\qquad M=4\max\{1,t_0\},\qquad 0\leq\tau\leq t_0$$

$$\Omega_\tau:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2(\tau-t_0)^2,\qquad \Omega_0:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2t_0^2$$

由初值条件

$$\iint\limits_{\Omega_\tau}\left(u_t^2+a^2\left(u_x^2+u_y^2\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq 0$$

因此

$$\iint\limits_{\Omega_\tau}\left(u_t^2+a^2\left(u_x^2+u_y^2\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

从而在 Ω_τ 上，成立

$$u_x=u_y=u_t=0$$

因此 u 为常数。由初始条件，$u\equiv 0$，进而原方程解唯一。

4.4.2 解对初值条件的连续依赖性

引理 4.4.3

对于区域

$$\Omega:(x,y)\in\mathbb{R}^2,t>0$$

如果在 Ω 上的二阶连续可微、在 $\overline{\Omega}$ 上一阶连续可微的函数 u 为二维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t), & \Omega:(x,y)\in\mathbb{R}^2,t>0\\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2\\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

的解，那么成立不等式

$$\iiint\limits_{K_\tau} u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\le N\left(\iint\limits_{\Omega_0}(\varphi^2+\psi^2+a^2(\varphi_x^2+\varphi_y^2))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iiint\limits_{K_\tau} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)$$

其中

$$\begin{aligned} &(x_0,y_0,t_0)\in\Omega, && 0\le\tau\le t_0\\ &M=4\max\{1,t_0\}, && N=3\max\{t_0,t_0^3M\}\\ &K_\tau:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le a^2(\tau-t_0)^2, && \Omega_0:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2t_0^2\end{aligned}$$

♡

定理 4.4.2 (解对初值条件的连续依赖性)

对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得若

$$\max\left\{\iint\limits_{\Omega_0}|\varphi_1-\varphi_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\iint\limits_{\Omega_0}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\iint\limits_{\Omega_0}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\iint\limits_{\Omega_0}|\psi_1-\psi_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\iiint\limits_{K_\tau}|f_1-f_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right\}<\delta$$

则相应的二维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t), & \Omega:(x,y)\in\mathbb{R}^2,t>0\\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2\\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

的解 u_1,u_2 成立

$$\iiint\limits_{K_\tau}|u_1-u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t<\varepsilon$$

其中

$$\begin{aligned} &(x_0,y_0,t_0)\in\Omega,\qquad M=4\max\{1,t_0\},\qquad 0\le\tau\le t_0\\ &K_\tau:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le a^2(\tau-t_0)^2,\qquad \Omega_0:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2t_0^2\end{aligned}$$

♡

证明 由于 u_1-u_2 为二维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f_1(x,y,t)-f_2(x,y,t), & \Omega:(x,y)\in\mathbb{R}^2,t>0\\ u(x,y,0)=\varphi_1(x,y)-\varphi_2(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2\\ u_t(x,y,0)=\psi_1(x,y)-\psi_2(x,y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

的解，由引理4.4.3

$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_{K_\tau} |u_1-u_2|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t \\
\le & N\left(\iint\limits_{\Omega_0}\left(|\varphi_1-\varphi_2|^2+|\psi_1-\psi_2|^2+a^2\left(\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|^2\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iiint\limits_{K_\tau}|f_1-f_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right) \\
< & N(2a^2+3)\delta^2
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&(x_0,y_0,t_0)\in\Omega, && 0\le\tau\le t_0 \\
&M=4\max\{1,t_0\}, && N=3\max\{t_0,t_0^3M\} \\
&K_\tau:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le a^2(\tau-t_0)^2, && \Omega_0:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2t_0^2
\end{aligned}
$$

第五章 椭圆型方程

5.1 调和函数

定义 5.1.1 (调和函数)

称二阶连续可微函数 u 为调和函数，如果 $\Delta u = 0$。

♣

定义 5.1.2 (Laplace 方程)

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 或 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为有界连通区域。

1. 内问题
   (a). 第一边值问题（Dirichlet 问题）：
   $$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u \mid_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$
   (b). 第二边值问题（Neumann 问题）：
   $$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mid_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$
   (c). 第三边值问题（Robin 问题）：
   $$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ (u \mid_{\partial\Omega} + \sigma u) = \varphi \end{cases}$$
2. 外问题
   (a). 对于 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$，要求无穷远处一致收敛于 0：
   $$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r} |u(x,y,z)| = 0 \end{cases}$$
   (b). 对于 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，要求无穷远处有界：
   $$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r} |u(x,y,z)| \leq M \end{cases}$$

♣

例题 5.1 三维外问题
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u \mid_{\partial B_3} = 1 \end{cases}$$
的解为
$$u(x,y,z) = 1, \qquad u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

定理 5.1.1 (调和函数的基本积分表达式)

1.
$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{|PP_0|}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{1}{|PP_0|}\right)\mathrm{d}S=\begin{cases} u(P_0), & P_0\in\Omega \\ u(P_0)/2, & P_0\in\partial\Omega \\ u(P_0), & P_0\notin\overline{\Omega}\end{cases}$$

2. $\Delta u=0$ 的解为
$$u(P_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{|PP_0|}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{1}{|PP_0|}\right)\mathrm{d}S$$

3. $\Delta u=f$ 的解为
$$u(P_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{|PP_0|}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{1}{|PP_0|}\right)\mathrm{d}S-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{f}{|PP_0|}\mathrm{d}V$$

♡

定理 5.1.2

Laplace 方程的 Dirichlet 内问题的解是唯一的，且连续依赖于边界条件。 ♡

5.2 调和函数的基本性质

5.2.1 Neumann 问题有解的等价条件

引理 5.2.1

对于在 Ω 上二阶连续可微、在 $\overline{\Omega}$ 上一阶连续可微的调和函数 u，成立
$$\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0$$
♡

定理 5.2.1 (Neumann 问题有解的等价条件)

Neumann 内问题
$$\begin{cases}\Delta u=0\\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mid_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$
有界的充分必要条件为：
$$\iint\limits_{\partial\Omega}\varphi\mathrm{d}S=0$$
♡

5.2.2 平均值性质

定理 5.2.2 (平均值性质)

调和函数 u 在其定义域 Ω 内任一点 P 的值等于其在以该点为球心且包含于 Ω 内的任意球面上的平均值。 ♡

5.2.3 极值原理

定理 5.2.3 (极值原理)

对于非常数调和函数 u，在其定义域 Ω 内部不达到其上界或下界。

推论 5.2.1 (极值原理)

设 u 在 Ω 内调和，且连续到边界，则 u 的最大值和最小值必在边界上达到。

推论 5.2.2 (比较原理)

设 u,v 在 Ω 内都调和，且连续到边界，若在 $\partial\Omega$ 上成立 $u\leq v$，则在 $\overline{\Omega}$ 上成立 $u\leq v$。

推论 5.2.3 (比较原理)

设 u,v 在 Ω 内都调和，且连续到边界，若在 $\partial\Omega$ 上成立 $u=v$，则在 $\overline{\Omega}$ 上成立 $u=v$。

5.3 Green 函数

5.3.1 Green 公式

定理 5.3.1 (Green 第一公式)

$$\iiint\limits_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v)\mathrm{d}V=\iint\limits_{\partial\Omega}u\frac{\nabla v\cdot\nabla v}{|\nabla v|}\mathrm{d}S$$

定理 5.3.2 (Green 第二公式)

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}V=\iint\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\nabla v\cdot\nabla v}{|\nabla v|}-v\frac{\nabla u\cdot\nabla u}{|\nabla u|}\right)\mathrm{d}S$$

定义 5.3.1 (Green 函数)

$$G(P,P_0)=\frac{1}{4\pi|PP_0|}-g(P,P_0),\qquad \begin{cases}\Delta g=0, & P\in\Omega\\ g\mid_{\partial\Omega}=\frac{1}{4\pi|PP_0|}\end{cases}$$

定理 5.3.3 (三维 Laplace 方程 Dirichlet 问题)

Laplace 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u=0\\ u\mid_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

的解为

$$u(P_0)=-\iint\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=-\iint\limits_{\partial\Omega}\varphi(P)\frac{\partial G(P,P_0)}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S$$

Green 函数的优点

1. Green 函数只与区域有关，与边界条件无关。一旦求出了某区域上的 Green 函数，就可以一劳永逸地解决这个区域上的所有 Dirichlet 边值问题，且其解可以用积分的形式表出。

2. Green 函数只与区域有关，与边界条件无关。一旦求出了某区域上的 Green 函数，就可以一劳永逸地解决这个区域上的所有 Dirichlet 边值问题，且其解可以用积分的形式表出

定理 5.3.4

Poisson 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u \mid_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

的解为

$$u(P_0) = -\iint\limits_{\partial\Omega} \varphi(P) \frac{\partial G(P, P_0)}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S - \iiint\limits_{\Omega} G(P, P_0) f(P) \mathrm{d}V$$

定理 5.3.5 (Green 函数的性质)

1. $G(P, P_0)$ 除 $P = P_0$ 点外处处成立 $\Delta G = 0$。
2. $\lim\limits_{P \to P_0} G(P, P_0) = \infty$
3. $G(P, P_0) \mid_{\partial\Omega} = 0$
4. $0 < G(P, P_0) < \dfrac{1}{4\pi |PP_0|}$
5. $G(P, Q) = G(Q, P)$
6. $\iint\limits_{\partial\Omega} \dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = -1$

5.3.2 特殊区域上的 Green 公式

定理 5.3.6 (球域 B_R 上的 Green 公式)

$$\begin{aligned} G(P, P_0) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|PP_0|} - \frac{R}{|OP_0|} \frac{1}{|PP_i|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\gamma}} - \frac{R}{\sqrt{R^4 + \rho_0^2\rho^2 - 2R^2\rho_0\rho\cos\gamma}} \right) \end{aligned}$$

其中 P_i 为 P_0 关于 ∂B_R 的反演点

$$\rho = |OP|, \qquad \rho_0 = |OP_0|, \qquad \gamma = \langle OM_0, OM \rangle$$

定理 5.3.7 (球域 B_R 上的 Poisson 公式)

球域上的 Laplace 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \Omega : x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \\ u \mid_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

的解为

$$\begin{aligned} u(P_0) &= -\iint\limits_{\partial B_R} \varphi(P) \frac{\partial G(P, P_0)}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{4\pi R} \iint\limits_{\partial B_R} \frac{\varphi(P)(R^2 - \rho_0^2)}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho\cos\gamma)^{3/2}} \mathrm{d}S \end{aligned}$$

称之为球域的 Poisson 公式。

5.3.3 二维问题

定理 5.3.8 (二维 Laplace 方程 Dirichlet 问题)

Laplace 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & (x,y)\in\Omega \\ u\mid_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

的解为

$$u(P_0) = -\int_{\partial\Omega}\varphi(P)\frac{\partial G(P,P_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s - \iint\limits_{\Omega} G(P,P_0)f(P)\mathrm{d}S$$

称之为 Poission 公式，其中

$$G(P,P_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|PP_0|} - g(P,P_0), \qquad \begin{cases} \Delta g = 0, & (x,y)\in\Omega \\ g\mid_{\partial\Omega} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|PP_0|} \end{cases}$$

称之为 Green 公式。

定理 5.3.9 (球域 B_R 上的 Green 公式)

$$\begin{aligned} G(P,P_0) &= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{|PP_0| - \ln\frac{R}{\rho_0|PP_i|}}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\cos\gamma}} - \ln\frac{R}{\sqrt{R^4+\rho_0^2\rho^2-2R^2\rho_0\rho\cos\gamma}}\right) \end{aligned}$$

其中 P_i 为 P_0 关于 ∂B_R 的反演点

$$\rho = |OP|, \qquad \rho_0 = |OP_0|, \qquad \gamma = \langle OM_0, OM\rangle$$

定理 5.3.10 (球域 B_R 上的 Poission 公式)

Laplace 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y)\in B_R \\ u\mid_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

的解为

$$\begin{aligned} u(P_0) &= \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B_R}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma}\varphi(P)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

5.4 调和函数的进一步性质——Poisson 公式的应用

定理 5.4.1 (调和函数的解析性)

区域 Ω 中的调和函数 u 为解析函数。

定理 5.4.2 (Harnack 第一定理)

对于在区域 Ω 上调和、在 $\overline{\Omega}$ 上连续的函数序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果 u_n 在 $\partial\Omega$ 上一致收敛，那么 u_n 在 Ω 内一致收敛，且其极限函数在 Ω 内为调和函数。

定理 5.4.3 (Harnack 不等式)

如果 u 在球 $B_R(Q)$ 内非负、调和，那么对于任意 $P \in B_R(Q)$，成立不等式

$$\frac{R(R-|OP|)}{(R+|OP|)^2}u(Q) \leq u(P) \leq \frac{R(R+|OP|)}{(R-|OP|)^2}u(Q)$$

♡

定理 5.4.4 (Liouville 定理)

在 $\mathbb{R}^2$ 上有上界或有下界的调和函数为常数。

♡

第六章 抛物型方程

6.1 齐次热传导方程的极值原理

定理 6.1.1 (极值原理)

对于矩形开域 $R: 0<x<l, 0<t<T$，抛物边界

$$\Gamma=\{0\leq x\leq l, t=0\}\cup\{x=0, 0\leq t\leq T\}\cup\{x=l, 0\leq t\leq T\}$$

如果 $u(x,t)$ 在 $\overline{R}$ 上连续，在 $\overline{R}\setminus\Gamma$ 内二阶连续可微，且在 R 内成立 $u_t=a^2u_{xx}$，那么 $u(x,t)$ 在 $\overline{R}$ 上的最大值于最小值在抛物边界 Γ 上达到。

6.2 热传导方程混合问题的适定性

定理 6.2.1

热传导方程第一边值问题

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+f(x,t), & 0<x<l, t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x), & 0\leq x\leq l \\ u|_{x=0}=\mu_1(x), & t\geq 0 \\ u|_{x=l}=\mu_2(x), & t\geq 0 \end{cases}$$

的解唯一且连续依赖于定解条件。

6.3 热传导方程柯西问题的适定性

定理 6.3.1

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi$$

定理 6.3.2

齐次热传导方程柯西问题解在有界函数类中唯一且连续依赖于初始条件。

第七章 基本解与解的积分表达式

7.1 广义函数及其性质

7.1.1 广义函数与 δ 函数的引出

定义 7.1.1 (支集)

定义函数 $\varphi(x)$ 的支集为

$$\mathrm{supp}(\varphi)=\overline{\{x:\varphi(x)\neq 0\}}$$

♣

定义 7.1.2 (基本函数空间)

对于 $a<b\in\mathbb{R}$，定义基本函数空间

$$\mathscr{D}(a,b)=\{\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}\text{为无穷此连续可微函数且}\mathrm{supp}(\varphi)\text{为紧集}\}$$

♣

定义 7.1.3 (弱收敛意义下的基本列)

称 (a,b) 上的可积函数序列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为弱收敛意义下的基本列，如果对于任意 $\varphi(x)\in\mathscr{D}(a,b)$，存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

♣

定义 7.1.4 (弱收敛意义下的基本列的等价)

称弱收敛意义下的基本列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 等价，如果对于任意 $\varphi(x)\in\mathscr{D}(a,b)$，成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b v_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

♣

定义 7.1.5 (广义函数)

对于弱收敛意义下的基本列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$，称泛函

$$\begin{aligned}u:\mathscr{D}(a,b)&\longrightarrow\mathbb{R}\\ \varphi(x)&\longmapsto\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

为广义函数。引入记号

$$\langle u,\varphi\rangle=\int_a^b u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

♣

注 可积函数为广义函数。

定义 7.1.6 (Dirac 函数)

$$\begin{aligned}\delta(x):\mathscr{D}(a,b)&\longrightarrow\mathbb{R}\\ \varphi(x)&\longmapsto\varphi(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(x-x_0):\mathscr{D}(a,b)&\longrightarrow\mathbb{R}\\ \varphi(x)&\longmapsto\varphi(x_0)\end{aligned}$$

♣

7.1.2 广义函数与 δ 函数的基本性质

命题 7.1.1 (广义函数与 δ 函数的基本性质)

1. 对称性：$\delta(x) = \delta(-x)$
2. $x\delta(x) = 0$
3. $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$
4. Fourier 变换：$\mathscr{F}[\delta(x)] = 1, \mathscr{F}[\delta(x - x_0)] = \mathrm{e}^{-i\lambda x_0}$

7.1.3 广义函数的导数

定义 7.1.7 (广义函数的导数)

称广义函数 $f(x)$ 的导数为广义函数 $f'(x)$，如果对于任意 $\varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$，成立

$$\langle f'(x), \varphi(x)\rangle = -\langle f(x), \varphi'(x)\rangle$$

对于多元广义函数 $f(x)$，成立

$$\langle f^{(\boldsymbol{\alpha})}(x), \varphi(x)\rangle = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\langle f(x), \varphi^{\boldsymbol{\alpha}}(x)\rangle$$

其中

$$f^{(\boldsymbol{\alpha})} = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

命题 7.1.2 (广义函数导数的性质)

1. 广义函数的任意阶导数存在。
2. 广义函数的导数与求导次序无关。
3. 广义函数的微分运算具有连续性。

7.1.4 广义函数的卷积

定理 7.1.1

$$\langle f * g, \varphi\rangle = \langle f, \langle g, \varphi\rangle\rangle$$

命题 7.1.3 (广义函数卷积的性质)

1. $f * g = g * f$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$
3. $\delta * f = f$
4. $\dfrac{\partial}{\partial x_k} f = \dfrac{\partial}{\partial x_k}\delta * f$
5. $\dfrac{\partial}{\partial x_k}(f * g) = \dfrac{\partial}{\partial x_k} f * g = f * \dfrac{\partial}{\partial x_k} g$

7.2 基本解与解的积分表达式

7.2.1 $L(u)=0$ 型方程的基本解

定义 7.2.1 ($L(u)=0$ **型方程的基本解)**

对于常系数线性微分算子 L，称方程

$$L(u)=\delta(P-P_0)$$

的解 $u(P,P_0)$ 为方程

$$L(u)=f(M)$$

的基本解。此时

$$u(P)=\int_{\mathbb{R}^3}u(P,P_0)f(P_0)\mathrm{d}V$$

为方程 $L(u)=f(M)$ 的解。

定理 7.2.1 (Laplace 方程的基本解)

1. 三维 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

   的基本解为

$$u(P,P_0)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|PP_0|}$$

2. 二维 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\delta(x-x_0,y-y_0)$$

   的基本解为

$$u(P,P_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|PP_0|}$$

7.2.2 $u_t=L(u)$ 型方程的基本解

定理 7.2.2 (一维热传导方程的基本解)

称方程

$$\begin{cases} v_t=a^2v_{xx}, & x\in\mathbb{R},t>0\\ v(x,0)=\delta(x-\xi), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

的解

$$v(x,t;\xi)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

为一维热传导方程

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R},t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

的基本解。

1. 一维齐次热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的解为

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) v(x,t;\xi) \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi$$

2. 一维非齐次热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) v(x,t;\xi) \mathrm{d}\xi + \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t-\tau;\xi) f(\xi,\tau) \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi,\tau) \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

定理 7.2.3 (三维热传导方程的基本解)

称方程

$$\begin{cases} v_t = a^2(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}), & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ v(x,y,z,0) = \delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta), & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的解

$$v(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}}$$

为三维热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的基本解。

1. 三维齐次热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的解为

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,\eta,\zeta) v(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,\eta,\zeta) \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

2. 三维非齐次热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x,y,z,t), & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t)=&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta,\zeta)v(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\\
&+\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}v(x,y,z,t-\tau;\xi,\eta,\zeta)f(\xi,\eta,\zeta,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\\
=&\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\\
&+\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\sqrt{t-\tau})^3}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}f(\xi,\eta,\zeta,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}
$$

7.2.3 $u_{tt}=L(u)$ 型方程的基本解

定理 7.2.4 (一维波动方程的基本解)

称方程

$$
\begin{cases}
v_{tt}=a^2v_{xx}, & x\in\mathbb{R},t>0\\
v(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}\\
v_t(x,0)=\delta(x-\xi), & x\in\mathbb{R}
\end{cases}
$$

的解

$$
v(x,t;\xi)=\begin{cases}
\frac{1}{2a}, & |x-\xi|<at\\
\frac{1}{4a}, & |x-\xi|=at\\
0, & |x-\xi|>at
\end{cases}
$$

为一维波动方程

$$
\begin{cases}
u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R},t>0\\
u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}\\
u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R}
\end{cases}
$$

的基本解。

1. 一维齐次波动方程

$$
\begin{cases}
u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R},t>0\\
u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}\\
u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R}
\end{cases}
$$

的解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t)&=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}v(x,t;\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{-\infty}^{+\infty}v(x,t;\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

2. 一维非齐次波动方程

$$
\begin{cases}
u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & x\in\mathbb{R},t>0\\
u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}\\
u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R}
\end{cases}
$$

的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$$

♡

附录 A 期末复习

A.1 填空题

填空题共 10 题，20 分，每题 2 分，仅涉及前五章内容。

A.1.1 二元二阶线性偏微分方程的分类

笔记 对于如下二元 2 阶线性偏微分方程

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

其中 a, b, c, d, e, f, g 为关于 x, y 的二元连续可微函数，且 $a^2 + b^2 + c^2 > 0$，其判别式为

$$\Delta = b^2 - ac$$

1. $\Delta > 0$：双曲型方程
2. $\Delta = 0$：抛物型方程
3. $\Delta < 0$：椭圆型方程

A.1.2 简单二元二阶线性偏微分方程的通解

笔记

1. $u_{xy} = 0 \iff u(x, y) = f(x) + g(y)$
2. $u_{xx} = 0 \iff u(x, y) = a(y)x + b(y)$
3. $u_{yy} = 0 \iff u(x, y) = a(x)y + b(x)$

A.1.3 一维弦振动方程的通解

笔记 弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \le x \le l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi \right) \cos \frac{an\pi}{l} t + \left(\frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

笔记 弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \le x \le l \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

的形式解为

$$u(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi \right) \cos \frac{an\pi}{l} t + \left(\frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

A.1.4 特征值问题

笔记 特征值问题

$$X''(x)+\lambda X(x)=0$$

1. 若 $X(0)=X(l)=0$，则
$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$
2. 若 $X'(0)=X'(l)=0$，则
$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=A_n\cos\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}$$
3. 若 $X'(0)=X(l)=0$，则
$$\lambda_n=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=A_n\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$
4. 若 $X(0)=X'(l)=0$，则
$$\lambda_n=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=B_n\sin\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

A.1.5 Fourier 变换

笔记

1. Fourier 变换：
$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-i\lambda\xi}\mathrm{d}\xi$$
2. Fourier 逆变换：
$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$
3. Fourier 积分：
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{i\lambda(x-\xi)}\mathrm{d}\xi$$

例题 A.1

$$\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right]=\frac{2\alpha}{\lambda^2+\alpha^2}$$
$$\mathscr{F}\left[\frac{\sin ax}{x}\right]=\begin{cases}\pi, & |\lambda|<a\\ \pi/2, & |\lambda|=a\\ 0, & |\lambda|>a\end{cases}$$

性质

1. 线性性：
$$\mathscr{F}[f(x)+g(x)]=\mathscr{F}[f(x)]+\mathscr{F}[g(x)],\qquad \mathscr{F}[\lambda f(x)]=\lambda\mathscr{F}[f(x)]$$
2. 位移性：
$$\mathscr{F}[f(x-b)]=\mathrm{e}^{-i\lambda b}\mathscr{F}[f(x)],\qquad b\in\mathbb{R}$$
3. 相似性：
$$\mathscr{F}[f(\alpha x)]=\frac{1}{|\alpha|}\mathscr{F}[f](\lambda/\alpha),\qquad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

4. 微分性：

$$\mathscr{F}[f'] = i\lambda\mathscr{F}[f]$$

5. 积分性：

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{i\lambda}\mathscr{F}[f]$$

A.1.6 Laplace 变换

笔记 Laplace 变换：

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \qquad p \in \mathbb{C}$$

例题 A.2

1. 常值函数：

$$\mathscr{L}[c] = \frac{c}{p}, \qquad \mathrm{Re}(p) > 0$$

2. 指数函数：

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{\alpha t}] = \frac{1}{p-\alpha}, \qquad \mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(\alpha)$$

3. 三角函数：

$$\mathscr{L}[\cos\omega t] = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \qquad \mathrm{Re}(p) > 0$$
$$\mathscr{L}[\sin\omega t] = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \qquad \mathrm{Re}(p) > 0$$

4. 幂函数：

$$\mathscr{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad \mathrm{Re}(p) > 0$$

性质

1. 线性性：

$$\mathscr{L}[f(t)+g(t)] = \mathscr{L}[f(t)] + \mathscr{L}[g(t)], \qquad \mathscr{L}[\lambda f(t)] = \lambda\mathscr{L}[f(t)]$$

2. 位移性：

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)] = F(p-a), \qquad \mathrm{Re}(p) > a$$

3. 延迟性：

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)] = \mathrm{e}^{-p\tau}\mathscr{L}[f(t)], \qquad t \geq \tau$$

4. 相似性：

$$\mathscr{L}[f(ct)] = \frac{1}{c}F\left(\frac{p}{c}\right)$$

5. 微分性：

$$\mathscr{L}[f'(t)] = p\mathscr{L}[f(t)] - f(0)$$

进而

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = p^n\mathscr{L}[f(t)] - (p^{n-1}f(0) + \cdots + pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0))$$

6. 卷积性：

$$\mathscr{L}[f(t) * g(t)] = \mathscr{L}[f(t)] \cdot \mathscr{L}[g(t)]$$

例题 A.3 求函数的 Laptops 变换：

$$f(t) = \sinh\omega t$$

解

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}[f(t)] &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} \sinh \omega t \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} \frac{\mathrm{e}^{\omega t} - \mathrm{e}^{-\omega t}}{2} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(p-\omega)t} \mathrm{d}t - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(p+\omega)t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \qquad \mathrm{Re}(p) > |\mathrm{Re}(\omega)|
\end{aligned}
$$

A.1.7 卷积

笔记 卷积：

$$
(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) \mathrm{d}t
$$

性质

1. 交换律：$f * g = g * f$
2. 结合律：$f * (g * h) = (f * g) * h$
3. 分配律：$f * (g + h) = f * g + f * h$
4. 卷积的 Fourier 变换：

$$
\mathscr{F}[f * g] = \mathscr{F}[f] \cdot \mathscr{F}[g], \qquad \mathscr{F}[f \cdot g] = \frac{1}{2\pi} \mathscr{F}[f] * \mathscr{F}[g]
$$

A.1.8 D'Alembert 公式

笔记 齐次波动方程

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\
u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\
u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}
\end{cases}
$$

的形式解为 D'Alembert 公式：

$$
u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \mathrm{d}\xi
$$

例题 A.4 用 D'Alembert 公式求解定解问题：

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\
u(x, 0) = x^2, & x \in \mathbb{R} \\
u_t(x, 0) = x, & x \in \mathbb{R}
\end{cases}
$$

解 由 D'Alembert 公式

$$
\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2}((x + at)^2 + (x - at)^2) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \xi \mathrm{d}\xi \\
&= x^2 + a^2 t^2 + xt
\end{aligned}
$$

A.1.9 依赖区间

笔记 一维齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. 依赖区间：点 (x,t) 的依赖区间为 $[x-at, x+at]$。
2. 决定区域：区间 $[x_1, x_2]$ 的决定区域为

$$D_1 = \{(x,t) : x_1 + at \leq x \leq x_2 - at, t \geq 0\}$$

3. 影响区域：点 x_0 的影响区域为

$$D_2 = \{(x,t) : x_0 - at \leq x \leq x_0 + at, t \geq 0\}$$

区间 $[x_1, x_2]$ 的影响区域为

$$D_3 = \{(x,t) : x_1 - at \leq x \leq x_2 + at, t \geq 0\}$$

笔记 二维齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,y,0) = \psi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

1. 依赖区域：点 (x_0, y_0, t_0) 的依赖区域为圆域

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq (at_0)^2$$

2. 决定区域：圆域

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq (at_0)^2$$

的决定区域为特征锥体

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq a^2(t_0-t)^2, \qquad t_0 \geq t$$

3. 影响区域：点 $(x_0, y_0, 0)$ 的影响区域为

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq (at)^2, \qquad t \geq 0$$

例题 A.5 在上半平面 $\{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ 上给出一点 $M(2,5)$，对于弦振动 $u_{tt} = u_{xx}$ 方程来说，点 M 的依赖区间是什么？它是否落在点 $(1,0)$ 的影响区间内？

解 由于点 (x,t) 的依赖区间为 $[x-t, x+t]$，因此点 M 的依赖区间为 $[-3,7]$。

由于点 x_0 的影响区域为

$$D_3 = \{(x,t) : x_0 - at \leq x \leq x_0 + at, t \geq 0\}$$

因此点 $(1,0)$ 的影响区域为

$$D_3 = \{(x,t) : 1 - t \leq x \leq 1 + t, t \geq 0\}$$

显然 $(2,5) \in D_3$，因此 M 落在点 $(1,0)$ 的影响区域内。

A.1.10 Green 公式

笔记 Green 公式：

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} - g(M, M_0), \qquad \begin{cases} \Delta g = 0, & (x,y) \in \Omega \\ g \mid_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \end{cases}$$

A.1.11 调和函数的基本解

笔记

1. 三维：
$$v(M,M_0)=\frac{1}{r_{MM_0}}$$
2. 二维：
$$v(M,M_0)=\ln\frac{1}{r_{MM_0}}$$

A.1.12 调和函数的积分表达式

笔记

1. 三维
   (a). $\Delta u=0$：
   $$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\mathrm{d}S$$
   (b). $\Delta u=f$：
   $$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\mathrm{d}S-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{f}{r_{MM_0}}\mathrm{d}V$$
2. 二维
   (a). Laplace 方程 Dirichlet 问题
   $$\begin{cases}\Delta u=0, & (x,y)\in\Omega\\ u\mid_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$
   的解为
   $$u(M_0)=-\int_{\partial\Omega}\varphi(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$$
   (b). Laplace 方程 Dirichlet 问题
   $$\begin{cases}\Delta u=f, & (x,y)\in\Omega\\ u\mid_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$
   的解为 Poission 公式
   $$u(M_0)=-\int_{\partial\Omega}\varphi(M)\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s-\iint\limits_{\Omega}G(M,M_0)f(M)\mathrm{d}S$$

A.1.13 球面平均值公式

笔记 球面平均值公式：
$$\overline{h}(M,r)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{\partial B_r(M)}h\mathrm{d}S$$

A.2 问答题

问答题共 7 题，80 分，前六题每题 10 分，最后一题 10 分。

A.2.1 二元二阶线性偏微分方程的化简

命题 A.2.1

对于如下二元 2 阶线性偏微分方程

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

其中 a, b, c, d, e, f, g 为关于 x, y 的二元连续可微函数，且 $a^2 + b^2 + c^2 > 0$，其判别式为

$$\Delta = b^2 - ac$$

1. $\Delta > 0$：双曲型方程
2. $\Delta = 0$：抛物型方程
3. $\Delta < 0$：椭圆型方程

证明

1. $\Delta > 0$—双曲型方程：特征方程

$$ay_x^2 - 2by_x + c = 0$$

存在两个实特征解

$$\varphi(x, y) = C_1, \qquad \psi(x, y) = C_2$$

作变量代换

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y)$$

那么原方程化为双曲型方程的第一标准型

$$u_{\xi\eta} = Au_\xi + Bu_\eta + Cu + D$$

进一步，作变量代换

$$\alpha = \xi + \eta, \qquad \beta = \xi - \eta$$

那么原方程化为双曲型方程的第二标准型

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = Au_\alpha + Bu_\beta + Cu + D$$

2. $\Delta = 0$—抛物型方程：特征方程

$$ay_x^2 - 2by_x + c = 0$$

仅存在一个实特征解

$$\varphi(x, y) = C$$

任取与 φ 线性无关的函数 ψ，作变量代换

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y)$$

那么原方程化为抛物型方程的标准型

$$u_{\eta\eta} = Au_\xi + Bu_\eta + Cu + D$$

进一步，作变量代换

$$v = u \exp\left(-\frac{1}{2}\int B(\eta, \tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

那么原方程化为抛物型方程的标准型

$$v_{\eta\eta} = Au_\xi + Cu + D$$

3. $\Delta < 0$—椭圆型方程：特征方程

$$ay_x^2 - 2by_x + c = 0$$

仅存在复特征解

$$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C_1,\qquad \varphi(x,y)-i\psi(x,y)=C_2$$

作变量代换

$$\xi=\varphi(x,y),\qquad \eta=\psi(x,y)$$

那么原方程化为椭圆型方程的标准型

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+D$$

例题 A.6 判断方程的类型。

$$u_{xx}+xyu_{yy}=0$$

解 特征方程为

$$y_x^2+xy=0$$

判别式为

$$\Delta=-xy$$

1. $xy>0$：椭圆型方程。
2. $xy=0$：抛物型方程。
3. $xy<0$：双曲型方程。

例题 A.7 化下列方程为标准形式。

$$u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$$

解 特征方程为

$$y_x^2-4y_x+5=0$$

特征解为

$$(2x-y)+ix=C_1,\qquad (2x-y)-ix=C_2$$

作变量代换

$$\xi=2x-y,\qquad \eta=x$$

那么

$$\begin{aligned}
u_x&=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=2u_\xi+u_\eta\\
u_y&=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=-u_\xi\\
u_{xx}&=\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=4u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\
u_{yy}&=\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=u_{\xi\xi}\\
u_{xy}&=\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial u_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=-2u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}
\end{aligned}$$

代入原方程，化为椭圆型方程的标准型

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\eta=0$$

例题 A.8 化下列方程为标准形式。

$$u_{xx}+yu_{yy}=0$$

解 特征方程为

$$y_x^2+y=0$$

当 $y>0$ 时，特征解为

$$2\sqrt{y}+ix=C_1,\qquad 2\sqrt{y}-ix=C_2$$

作变量代换

$$\xi=x,\qquad \eta=2\sqrt{y}$$

那么

$$\begin{aligned}
u_x&=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=u_\xi\\
u_y&=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{2}{\eta}u_\eta\\
u_{xx}&=\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=u_{\xi\xi}\\
u_{yy}&=\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{4}{\eta^2}u_{\eta\eta}-\frac{4}{\eta^3}u_\eta
\end{aligned}$$

代入原方程，化为椭圆型方程的标准型

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\frac{u_\eta}{\eta}$$

当 $y<0$ 时，特征解为

$$x+2\sqrt{-y}=C_1,\qquad x-2\sqrt{-y}=C_2$$

作变量代换

$$\xi=x+2\sqrt{-y},\qquad \eta=x-2\sqrt{-y}$$

那么

$$\begin{aligned}
u_x&=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=u_\xi+u_\eta\\
u_y&=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{4}{\xi-\eta}(u_\eta-u_\xi)\\
u_{xx}&=\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\
u_{yy}&=\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{y}(2u_{\xi\eta}-u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta})
\end{aligned}$$

代入原方程，化为双曲型方程的第一标准型

$$u_{\xi\eta}=\frac{u_\eta-u_\xi}{2(\xi-\eta)}$$

例题 A.9 确定下列方程的通解。

$$u_{xx}-3u_{xy}+2u_{yy}=0$$

解 特征方程为

$$y_x^2+3y_x+2=0$$

特征解为

$$x+y=C_1,\qquad 2x+y=C_2$$

作变量代换

$$\xi=x+y,\qquad \eta=2x+y$$

那么

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi + 2u_\eta \\
u_y &= \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = u_\xi + u_\eta \\
u_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} \\
u_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\
u_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta}
\end{aligned}
$$

代入原方程，化为双曲型方程的第一标准型

$$u_{\xi\eta} = 0$$

从而通解为

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

即

$$u(x,y) = f(x+y) + g(2x+y)$$

其中 f, g 为任意二阶连续可微函数。

A.2.2 特征值问题

命题 A.2.2

特征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{*}$$

1. 若 $X(0) = X(l) = 0$，则
$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$
2. 若 $X'(0) = X'(l) = 0$，则
$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}$$
3. 若 $X'(0) = X(l) = 0$，则
$$\lambda_n = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = A_n \cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$
4. 若 $X(0) = X'(l) = 0$，则
$$\lambda_n = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = B_n \sin\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

证明

1. 若 $\lambda > 0$，则线性微分方程 (*) 的特征方程为
$$t^2 + \lambda = 0$$
其解为
$$t_1 = i\sqrt{\lambda}, \qquad t_2 = -i\sqrt{\lambda}$$
因此线性微分方程 (*) 的通解为
$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x), \qquad X'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

(a). 若 $X(0)=0$，则 $A=0$，因此

$$X(x)=B\sin(\sqrt{\lambda}x),\qquad X'(x)=B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

I. 若 $X(l)=0$，则 $B\sin(\sqrt{\lambda}l)=0$，因此

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

II. 若 $X'(l)=0$，则 $B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l)=0$，因此

$$\lambda_n=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=B_n\sin\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

(b). 若 $X'(0)=0$，则 $B=0$，因此

$$X(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x),\qquad X'(x)=-A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

I. 若 $X(l)=0$，则 $A\cos(\sqrt{\lambda}l)=0$，因此

$$\lambda_n=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=A_n\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

II. 若 $X'(l)=0$，则 $-A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l)=0$，因此

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=A_n\cos\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

2. 若 $\lambda=0$，则线性微分方程 (*) 的特征方程为

$$t^2=0$$

其解为

$$t_1=t_2=0$$

因此线性微分方程 (*) 的通解为

$$X(x)=Ax+B,\qquad X'(x)=A$$

(a). 若 $X(0)=0$，则 $B=0$，因此

$$X(x)=Ax,\qquad X'(x)=A$$

I. 若 $X(l)=0$，则 $Al=0$，因此

$$X(x)=0$$

II. 若 $X'(l)=0$，则 $A=0$，因此

$$X(x)=0$$

(b). 若 $X'(0)=0$，则 $A=0$，因此

$$X(x)=B,\qquad X'(x)=0$$

I. 若 $X(l)=0$，则 $B=0$，因此

$$X(x)=0$$

II. 若 $X'(l)=0$，则 $0=0$，因此

$$X(x)=B$$

3. 若 $\lambda<0$，则线性微分方程 (*) 的特征方程为

$$t^2+\lambda=0$$

其解为

$$t_1=\sqrt{-\lambda},\qquad t_2=-\sqrt{-\lambda}$$

因此线性微分方程 (*) 的通解为

$$X(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x},\qquad X'(x)=A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x}-B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

(a). 若 $X(0)=0$，则 $A+B=0$。

I. 若 $X(l)=0$，则 $Ae^{\sqrt{-\lambda}l}+Be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0$。联立方程

$$\begin{cases}A+B=0\\ Ae^{\sqrt{-\lambda}l}+Be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0\end{cases}$$

解得 $A=B=0$，因此

$$X(x)=0$$

II. 若 $X'(l)=0$，则 $A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l}-B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0$。联立方程

$$\begin{cases}A+B=0\\ A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l}-B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0\end{cases}$$

解得 $A=B=0$，因此

$$X(x)=0$$

(b). 若 $X'(0)=0$，则 $A\sqrt{-\lambda}-B\sqrt{-\lambda}=0$。

I. 若 $X(l)=0$，则 $Ae^{\sqrt{-\lambda}l}+Be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0$。联立方程

$$\begin{cases}A\sqrt{-\lambda}-B\sqrt{-\lambda}=0\\ Ae^{\sqrt{-\lambda}l}+Be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0\end{cases}$$

解得 $A=B=0$，因此

$$X(x)=0$$

II. 若 $X'(l)=0$，则 $A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l}-B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0$。联立方程

$$\begin{cases}A\sqrt{-\lambda}-B\sqrt{-\lambda}=0\\ A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l}-B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0\end{cases}$$

解得 $A=B=0$，因此

$$X(x)=0$$

A.2.3 分离变量法

命题 A.2.3

对于弦振动方程

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l,t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\le x\le l\\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l\end{cases}$$

求解加之如下边界条件的形式解。

1. $u(0,t)=u(l,t)=0$：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi\right)\cos\frac{an\pi}{l}t+\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

2. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$：

$$u(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{an\pi}{l}t+\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

证明

1. 令 $u(x,t)=T(t)X(x)$，代入方程

$$T''(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$$

于是存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得成立

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

即

$$\begin{cases} T''(t)+a^2\lambda T(t)=0 \\ X''(x)+\lambda X(x)=0 \end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

由定理2.2.2

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

代入原方程

$$T_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n(t)=0,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

通解为

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

从而原微分方程的解为

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

由迭加原理

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

考虑到初始条件

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

由 Fourier 级数2.1.12

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\qquad B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

从而原微分方程的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{an\pi}{l}t+\left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

2. 令 $u(x,t)=T(t)X(x)$，代入方程

$$T''(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$$

于是存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得成立

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

即

$$\begin{cases} T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

由定理2.2.2

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

代入原方程

$$T_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

通解为

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t, \qquad n \in \mathbb{N}$$

从而原微分方程的解为

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

由迭加原理

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

考虑到初始条件

$$\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{l}x, \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{an\pi}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

由 Fourier 级数2.1.12

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi, \qquad B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi, \qquad n \in \mathbb{N}$$

从而原微分方程的形式解为

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{an\pi}{l}t + \left(\frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x$$

命题 A.2.4

对于热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \end{cases}$$

求解加之如下边界条件的形式解。

1. $u(0,t) = u(l,t) = 0$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

2. $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

♠

证明

1. 令 $u(x,t)=T(t)X(x)$，代入方程

$$T'(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$$

于是存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得成立

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

即

$$\begin{cases} T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 \\ X''(x)+\lambda X(x)=0 \end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

由定理2.2.2

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\qquad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

代入原方程

$$T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n(t)=0,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

通解为

$$T_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t},\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

从而原微分方程的解为

$$u_n(x,t)=C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

由迭加原理

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

考虑到初始条件

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

由 Fourier 级数2.1.12

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

从而原微分方程的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

2. 令 $u(x,t)=T(t)X(x)$，代入方程

$$T'(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$$

于是存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得成立

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

即

$$\begin{cases} T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 \\ X''(x)+\lambda X(x)=0 \end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

由定理2.2.2

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

代入原方程

$$T_n'(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

通解为

$$T_n(t) = C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

从而原微分方程的解为

$$u_n(x,t) = C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

由迭加原理

$$u(x,t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

考虑到初始条件

$$\varphi(x) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\frac{n\pi}{l}x$$

由 Fourier 级数2.1.12

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi, \qquad n \in \mathbb{N}$$

从而原微分方程的形式解为

$$u(x,t) = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

例题 A.10 使用分离变量法求解定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x,0) = x, & 0 \le x \le l \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

解 令 $u(x,t) = T(t)X(x)$，代入方程

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

于是存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得成立

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

即

$$\begin{cases} T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

考虑到边界条件

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

由定理2.2.2

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

代入原方程

$$T_n'(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

通解为

$$T_n(t) = C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

从而原微分方程的解为

$$u_n(x,t) = C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \cos\frac{n\pi}{l}x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

由迭加原理

$$u(x,t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \cos\frac{n\pi}{l}x$$

考虑到初始条件

$$x = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\frac{n\pi}{l}x$$

由 Fourier 级数2.1.12

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \xi\cos\frac{n\pi}{l}\xi \mathrm{d}\xi = \begin{cases} l, & n = 0 \\ 0, & n \geq 1 \text{且} 2 \mid n \\ \frac{-4l}{n^2\pi^2}, & n \geq 1 \text{且} 2 \nmid n \end{cases}$$

从而原微分方程的形式解为

$$u(x,t) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{a(2n-1)\pi}{l}\right)^2 t}}{(2n-1)^2} \cos\frac{(2n-1)\pi}{l}x$$

A.2.4 圆域上的 Laplace 方程

命题 A.2.5

Laplace 方程

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x^2 + y^2 < a^2 \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = \varphi(x,y) \end{cases}$$

的形式解为

$$u(\rho,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (A_n\cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

其中

$$f(\theta) = \varphi(a\cos\theta, a\sin\theta), \qquad A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta \mathrm{d}\theta, \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta$$

例题 A.11 求解 Laplace 方程

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x^2 + y^2 < a^2 \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = x + y \end{cases}$$

解 令 $f(\theta)=a(\cos\theta+\sin\theta)$，求解其 Fourier 系数

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta=\frac{a}{\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & n=0\\ a, & n=1\\ 0, & n\geq 1\end{cases}$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta=\frac{a}{\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & n=0\\ a, & n=1\\ 0, & n\geq 1\end{cases}$$

从而微分方程的形式解为

$$\begin{aligned}u(\rho,\theta)&=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\\&=\rho\cos\theta+\rho\sin\theta\end{aligned}$$

进而

$$u(x,y)=x+y$$

例题 A.12 求解 Laplace 方程

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, & x^2+y^2<a^2\\ u|_{x^2+y^2=a^2}=\sin\theta\cos 2\theta\end{cases}$$

其中 $\theta=\arctan(y/x)$。

解 令 $f(\theta)=\sin\theta\cos 2\theta$，求解其 Fourier 系数

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos 2\theta\cos n\theta\mathrm{d}\theta=0$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos 2\theta\sin n\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}-1/2, & n=1\\ 0, & n=2\\ 1/2, & n=3\\ 0, & n\geq 4\end{cases}$$

从而微分方程的形式解为

$$\begin{aligned}u(\rho,\theta)&=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\\&=\frac{\rho^3}{2a^3}\sin 3\theta-\frac{\rho}{2a}\sin\theta\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{\rho^3}{2a^3}\sin 3\theta-\frac{\rho}{2a}\sin\theta\\&=\frac{\rho^3}{2a^3}(3\sin\theta-4\sin^3\theta)-\frac{\rho}{2a}\sin\theta\\&=\frac{1}{2a^3}(3(x^2+y^2)y-4y^3)-\frac{y}{2a}\\&=\frac{1}{2a^3}(3x^2y-y^3)-\frac{y}{2a}\\&=\frac{3x^2y-y^3}{2a^3}-\frac{y}{2a}\end{aligned}$$

A.2.5 Fourier 变换

笔记 Fourier 变换：

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-i\lambda\xi}\mathrm{d}\xi$$

例题 A.13 对于 $\eta>0$，求函数的 Fourier 变换：

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\eta x^2},\qquad x\in\mathbb{R}$$

解

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f]&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-i\lambda\xi}\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\eta\xi^2-i\lambda\xi}\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{1}{\sqrt{\eta}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4\eta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\zeta^2}\mathrm{d}\zeta \qquad \left(\zeta=\sqrt{\eta}\left(\xi+\frac{i\lambda}{2\eta}\right)\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{\eta}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4\eta}}\Gamma(1/2)\\
&=\sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4\eta}}
\end{aligned}$$

A.2.6 三维波动方程

笔记 球面平均值函数：

$$\overline{h}(M,r)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{\partial B_r(M)} h\mathrm{d}S$$

对于 $(\xi,\eta,\zeta)\in\partial B_r(P)$ 作换元

$$\xi=x+r\sin\theta\cos\varphi,\qquad \eta=y+r\sin\theta\sin\varphi,\qquad \zeta=z+r\cos\theta$$

那么

$$E=\xi_\theta^2+\eta_\theta^2+\zeta_\theta^2=r^2,\qquad F=\xi_\theta\xi_\varphi+\eta_\theta\eta_\varphi+\zeta_\theta\zeta_\varphi=0,\qquad G=\xi_\varphi^2+\eta_\varphi^2+\zeta_\varphi^2=r^2\sin^2\theta$$

因此

$$\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

因此

$$\begin{aligned}
\overline{h}(x,y,z,r)&=\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi} h(x+r\sin\theta\cos\varphi,y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta)r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi} h(x+r\sin\theta\cos\varphi,y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

命题 A.2.6

三维波动方程

$$\begin{cases}
u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,t>0\\
u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\\
u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3
\end{cases}$$

的形式解为

$$u(M,t)=\frac{\partial}{\partial t}(t\overline{\varphi}(M,at))+t\overline{\psi}(M,at)$$

换言之

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)=&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\varphi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\psi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

例题 A.14 求解三维波动方程初值问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,t>0\\ u(x,y,z,0)=x^2+yz, & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\\ u_t(x,y,z,0)=0, & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\end{cases}$$

解 令 $\psi(x,y,z)=x^2+yz$，求其平均值函数

$$\begin{aligned}\overline{\psi}(x,y,z,r)=&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\psi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta\cos\varphi,z+r\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\\=&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}((x+r\cos\theta)^2+(y+r\sin\theta\cos\varphi)(z+r\sin\theta\sin\varphi))\sin\theta\mathrm{d}\theta\\=&\frac{1}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\pi}((x+r\cos\theta)^2+yz)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&+\frac{r}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi}(y\sin\varphi+z\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&+\frac{r^2}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\right)\\=&\frac{1}{2}\int_0^{\pi}((x+r\cos\theta)^2+yz)\sin\theta\mathrm{d}\theta\\=&x^2+yz+\frac{1}{3}r^2\end{aligned}$$

从而方程的形式解为

$$u(x,y,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(t\overline{\psi}(x,y,z,at)\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(t\left(x^2+yz+\frac{1}{3}a^2t^2\right)\right)=x^2+yz+a^2t^2$$

A.2.7 调和函数的定义

例题 A.15 判断函数 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 是否为调和函数。

解 由于

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x-6x=0$$

因此 u 为调和函数。

例题 A.16 判断函数 $u(x,y)=3x^2y-y^3$ 是否为调和函数。

解 由于

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y-6y=0$$

因此 u 为调和函数。

A.2.8 Green 函数的基本性质

命题 A.2.7

Green 函数在区域 Ω 内成立不等式

$$0 < G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$$

证明 由 Green 函数的定义

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - g(M, M_0), \qquad \begin{cases} \Delta g = 0, & P \in \Omega \\ g\mid_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} \end{cases}$$

从而 g 在 Ω 内调和，且

$$g\mid_{\partial\Omega} = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} > 0$$

由调和函数极值原理，在 Ω 内成立 $g > 0$，因此

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - g(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$$

另一方面，由于 $\lim\limits_{M \to M_0} G(M, M_0) = +\infty$，从而存在充分小的 $\varepsilon > 0$，使得成立 $B_\varepsilon(M_0) \subset \Omega$，且在 $\overline{B}_\varepsilon(M_0)$ 上成立 $G > 0$。在 $\Omega \setminus B_\varepsilon(M_0)$ 上，$\Delta G = 0$，且 $G\mid_{\partial\Omega} = 0$，同时 $G\mid_{\partial B_\varepsilon(M_0)} > 0$。由调和函数极值原理，在 $\Omega \setminus B_\varepsilon(M_0)$ 上成立 $G > 0$，进而在 Ω 内成立 $G > 0$。

综上所述

$$0 < G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$$

A.3 经典方程

定理 A.3.1 (弦振动方程)

对于弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \le x \le l \end{cases}$$

求解加之如下边界条件的形式解。

1. $u(0, t) = u(l, t) = 0$：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi \right) \cos \frac{an\pi}{l} t + \left(\frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

2. $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$：

$$u(x,t) = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi \right) \cos \frac{an\pi}{l} t + \left(\frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

定理 A.3.2 (热传导方程)

对于热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \end{cases}$$

求解加之如下边界条件的形式解。

1. $u(0,t)=u(l,t)=0$:
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$
2. $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$:
$$u(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\cos\frac{n\pi}{l}x$$

定理 A.3.3

Laplace 方程
$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, & x^2+y^2<a^2\\ u|_{x^2+y^2=a^2}=\varphi(x,y)\end{cases}$$
的形式解为
$$u(\rho,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$
其中
$$f(\theta)=\varphi(a\cos\theta,a\sin\theta),\qquad A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\cos n\tau\mathrm{d}\tau,\qquad B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\sin n\tau\mathrm{d}\tau$$

定理 A.3.4 (齐次热传导方程)

齐次热传导方程
$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R},t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$
的形式解为
$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi$$

定理 A.3.5 (齐次波动方程)

齐次波动方程
$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R},t>0\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}\\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$
的形式解为
$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

定理 A.3.6 (三维波动方程)

三维波动方程
$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,t>0\\ u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\\ u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\end{cases}$$

的形式解为

$$u(P,t)=\frac{\partial}{\partial t}(t\overline{\varphi}(P,at))+t\overline{\psi}(P,at)$$

换言之

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)=&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\varphi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&+\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\psi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

♡