

第一章

1.1 第一节

1.1.1 第一题

证明:

$$(B - A) \cup A = B \iff A \subset B \quad (1)$$

证明: 显然!

1.1.2 第二题

证明:

$$A - B = A \cap B^c \quad (2)$$

证明: 显然!

1.1.3 第三题

1.1.4 第四题

证明:

$$(A - B) \cup B = (A \cup B) - B \iff B = \emptyset \quad (3)$$

证明: 显然!

1.1.5 第五题

1.1.5.1 第一问

设全集 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, 证明:

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \quad (4)$$

证明: 容易证明。

1.1.5.2 第二问

设全集为

$$S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad (5)$$

对于

$$\mathcal{A} = \left\{ \left\{ \frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \right\} \quad (6)$$

证明:

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \left\{ \emptyset, \left\{ \frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N}^* \right\}, \left\{ \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}, \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \right\} \quad (7)$$

证明: 容易证明。

1.1.5.3 第三问

记

$$\mathcal{A} = \left\{ \left\{ \frac{1}{2n-1} \right\} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \quad (8)$$

$$A = \left\{ \frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}, \quad B = \left\{ \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \quad (9)$$

$$S = A \cup B \quad (10)$$

$$\mathcal{P} = \{T : T \subset A\}, \quad \mathcal{Q} = \{T : T^c \subset A\} \quad (11)$$

求证：

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \quad (12)$$

证明：

首先我们证明 $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 为一个 σ -代数。

包含空集：注意到 $\emptyset \subset A$ ，因此 $\emptyset \in \mathcal{P}$ ，进而 $\emptyset \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 。

对补封闭：任取集合 $T \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 。

如果 $T \in \mathcal{P}$ ，那么 $T \subset A$ ，因此 $T^c \in \mathcal{Q}$ ，进而 $T^c \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 。

如果 $T \in \mathcal{Q}$ ，那么 $T^c \subset A$ ，因此 $T^c \in \mathcal{P}$ ，进而 $T^c \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 。

因此 $T \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 。

集族 $\mathcal{P}$ 对于可数并封闭：任取集合列 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}$ ，那么

$$A_n \subset A, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad (13)$$

因此

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A \quad (14)$$

进而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{P} \quad (15)$$

集族 $\mathcal{Q}$ 对于可数并封闭：任取集合列 $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{Q}$ ，那么

$$B_m^c \subset A, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+ \quad (16)$$

因此

$$\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \right)^c = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m^c \subset A \quad (17)$$

进而

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \in \mathcal{Q} \quad (18)$$

集族 $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 对可数并封闭：在集族 $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 中任取集合列，由于 $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ ，因此该集合列可分为两类，不妨仍记为 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}$ 和 $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{Q}$ 。注意，这里该集合列均存在集族 $\mathcal{P}$ 和集族 $\mathcal{Q}$ 中的元素，因为上文已讨论过集族 $\mathcal{P}$ 和集族 $\mathcal{Q}$ 的可数并封闭性；同时，这里将两类集合列都写为无穷的形式，是因为倘若其中一类集合列仅有有限个元素，不妨记为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，那么将其写成 $A_1, A_2, \dots, A_n, A_n, \dots$ ，保证其无穷的形式。下面开始讨论集族 $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 的可数并封闭性。

注意到

$$\mathcal{Q} = \{T : T^c \subset A\} = \{T \cup B : T \subset A\} \quad (19)$$

由于

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \in \mathcal{Q} \quad (20)$$

因此存在 $N \subset A$ ，使得

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = N \cup B \quad (21)$$

同时又因为存在 $M \subset A$ ，使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = M \quad (22)$$

因此

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m\right) = M \cup N \cup B = (M \cup N) \cup B \in \mathcal{Q} \quad (23)$$

进而

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m\right) \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \quad (24)$$

至此, 我们证明了 $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 为一个 σ -代数。

下面我们证明 $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 为包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ -代数。

任取全集 S 的子集的 σ -代数 $\mathcal{F}$, 满足 $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ 。

由于 $\mathcal{F}$ 对可数并封闭, 因此 $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ 。特别的, $A \in \mathcal{F}$, 因此 $B = A^c \in \mathcal{F}$ 。

注意到

$$\mathcal{Q} = \{T : T^c \subset A\} = \{T \cup B : T \subset A\} \quad (25)$$

因此 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$ 。

进而

$$\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \subset \mathcal{F} \quad (26)$$

至此, 我们证明了 $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 为包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ -代数。

综上所述,

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \quad (27)$$

原命题得证!

1.1.6 第六题

对于 $A \subset S$, 定义 A 的示性函数为

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (28)$$

给定 $A_1, A_2, \dots \subset S$, 证明:

$$\varphi_{\limsup_n A_n}(x) = \limsup_n \varphi_{A_n}(x) \quad (29)$$

$$\varphi_{\liminf_n A_n}(x) = \liminf_n \varphi_{A_n}(x) \quad (30)$$

证明:

(i): 对于 $\varphi_{\limsup_n A_n}(x) = \limsup_n \varphi_{A_n}(x)$ 。

当 $x \in \limsup_n A_n$ 时, 那么对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $m \geq n$, 使得成立 $x \in A_m$ 。注意到

$$\text{LHS} = 1 \quad (31)$$

$$\text{RHS} = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{m \geq n} \varphi_{A_m}(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} 1 = 1 \quad (32)$$

从而

$$\varphi_{\limsup_n A_n}(x) = \limsup_n \varphi_{A_n}(x) = 1 \quad (33)$$

当 $x \notin \limsup_n A_n$ 时, 那么存在 $n \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m \geq n$, 成立 $x \notin A_m$ 。注意到

$$\text{LHS} = 0 \quad (34)$$

$$\text{RHS} = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{m \geq n} \varphi_{A_m}(x) = 0 \quad (35)$$

从而

$$\varphi_{\limsup_n A_n}(x) = \limsup_n \varphi_{A_n}(x) = 0 \quad (36)$$

进而

$$\varphi_{\limsup_n A_n}(x) = \limsup_n \varphi_{A_n}(x) \quad (37)$$

(ii): 对于 $\varphi_{\liminf_n A_n}(x) = \liminf_n \varphi_{A_n}(x)$ 。

当 $x \in \liminf_n A_n$ 时, 那么存在 $n \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m \geq n$, 成立 $x \in A_m$ 。注意到

$$\text{LHS} = 1 \quad (38)$$

$$\text{RHS} = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \inf_{m \geq n} \varphi_{A_m}(x) = 1 \quad (39)$$

从而

$$\varphi_{\liminf_n A_n}(x) = \liminf_n \varphi_{A_n}(x) = 1 \quad (40)$$

当 $x \notin \liminf_n A_n$ 时, 那么对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $m \geq n$, 使得成立 $x \notin A_m$ 。注意到

$$\text{LHS} = 0 \quad (41)$$

$$\text{RHS} = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \inf_{m \geq n} \varphi_{A_m}(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} 0 = 0 \quad (42)$$

从而

$$\varphi_{\liminf_n A_n}(x) = \liminf_n \varphi_{A_n}(x) = 0 \quad (43)$$

进而

$$\varphi_{\liminf_n A_n}(x) = \liminf_n \varphi_{A_n}(x) \quad (44)$$

综上所述, 原命题得证!

1.1.7 第七题

对于定义在 E 上的实函数, $a \in \mathbb{R}$, 证明:

$$E[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right] \quad (45)$$

$$E[f \geq a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right] \quad (46)$$

证明: 对于第一式。

首先, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 显然成立

$$E[f > a] \supset E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right] \quad (47)$$

因此

$$E[f > a] \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right] \quad (48)$$

而任取 $x \in E[f > a]$, 存在 $b > a$, 使得 $x \in E[f \geq b]$, 取 $n = \lceil \frac{1}{b-a} \rceil + 1$, 那么

$$x \in E[f \geq b] \subset E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right] \quad (49)$$

于是

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right] \quad (50)$$

因此

$$E[f > a] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right] \quad (51)$$

进而

$$E[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geq a + \frac{1}{n}\right] \quad (52)$$

对于第二式。

首先, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 显然成立

$$E[f \geq a] \subset E\left[f > a - \frac{1}{n}\right] \quad (53)$$

因此

$$E[f \geq a] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right] \quad (54)$$

而任取

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right] \quad (55)$$

那么对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 成立 $x \in E\left[f > a - \frac{1}{n}\right]$, 倘若 $x \notin E[f \geq a]$, 即 $x \in E[f < a]$, 那么存在 $b < a$, 使得 $x \in E[f < b]$, 取 $n = \lceil \frac{1}{b-a} \rceil$, 那么

$$x \in E[f < a] \subset E\left[f \leq a - \frac{1}{n}\right] \quad (56)$$

矛盾!

因此 $x \in E[f \geq a]$, 于是

$$E[f \geq a] \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right] \quad (57)$$

进而

$$E[f \geq a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right] \quad (58)$$

综上所述, 原命题得证!

1.1.8 第八题

证明: 如果实函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上收敛于 f , 那么对于任意 $a \in \mathbb{R}$, 成立

$$E[f \leq a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} E\left[f_n \leq a + \frac{1}{k}\right] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} E\left[f_n < a + \frac{1}{k}\right] \quad (59)$$

证明: 即证明

$$E[f \leq a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E\left[f_m \leq a + \frac{1}{k}\right] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E\left[f_m < a + \frac{1}{k}\right] \quad (60)$$

对于第一式。

首先, 对于任意 $m, k \in \mathbb{N}^*$, 显然成立

$$E[f \leq a] \subset E\left[f_m \leq a + \frac{1}{k}\right] \quad (61)$$

于是

$$E[f \leq a] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E\left[f_m \leq a + \frac{1}{k}\right] \quad (62)$$

其次, 任取

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E \left[f_m \leq a + \frac{1}{k} \right] \quad (63)$$

那么存在 $k, n \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m \geq n$, 成立

$$x \in E \left[f_m \leq a + \frac{1}{k} \right] \quad (64)$$

由 m 的任意性, 且 $f_m \rightarrow f$, 那么

$$x \in E \left[f \leq a + \frac{1}{k} \right] \quad (65)$$

由1.1.7, 因为 k 的任意性 $x \in E[f \leq a]$, 因此

$$E[f \leq a] \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E \left[f_m \leq a + \frac{1}{k} \right] \quad (66)$$

进而

$$E[f \leq a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E \left[f_m \leq a + \frac{1}{k} \right] \quad (67)$$

对于第二式。

首先, 对于任意 $m, k \in \mathbb{N}^*$, 显然成立

$$E[f \leq a] \subset E \left[f_m < a + \frac{1}{k} \right] \quad (68)$$

于是

$$E[f \leq a] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E \left[f_m < a + \frac{1}{k} \right] \quad (69)$$

其次, 任取

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E \left[f_m < a + \frac{1}{k} \right] \quad (70)$$

那么存在 $k, n \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m \geq n$, 成立

$$x \in E \left[f_m < a + \frac{1}{k} \right] \quad (71)$$

由 m 的任意性, 且 $f_m \rightarrow f$, 那么

$$x \in E \left[f < a + \frac{1}{k} \right] \quad (72)$$

由1.1.7, 因为 k 的任意性 $x \in E[f \leq a]$, 因此

$$E[f \leq a] \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E \left[f_m < a + \frac{1}{k} \right] \quad (73)$$

进而

$$E[f \leq a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E \left[f_m < a + \frac{1}{k} \right] \quad (74)$$

综上所述, 原命题得证!

1.2 第二节

1.2.1 第一题

证明:

$$(-1, 1) \sim \mathbb{R} \quad (75)$$

证明:

$$\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad (76)$$

$$x \mapsto \tan \frac{\pi}{2} x \quad (77)$$

1.2.2 第二题

证明: 对于任意 $a < b \in \mathbb{R}$, 成立

$$(a, b) \sim (0, 1) \quad (78)$$

证明:

$$\varphi : (0, 1) \rightarrow (a, b) \quad (79)$$

$$x \mapsto (b - a)x + a \quad (80)$$

1.2.2 第三题

证明: 对于任意非空开集 $G \subset \mathbb{R}^2$, 成立

$$G \sim \mathbb{R}^2 \quad (81)$$

证明: 记单位圆为 $\mathbb{D}$, 只需证明

$$\mathbb{D} \sim \mathbb{R}^2 \quad (82)$$

表示为极坐标, 只需证明

$$[0, 1) \times [0, 2\pi) \sim [0, \infty) \times [0, 2\pi) \quad (83)$$

只需证明

$$[0, 1) \sim [0, \infty) \quad (84)$$

定义双射

$$\varphi : [0, 1) \rightarrow [0, \infty) \quad (85)$$

$$x \mapsto \tan \frac{\pi}{2} x \quad (86)$$

1.3 第三节

1.3.1 第一题

证明: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ 为可数集。

证明: 注意到

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}} \{(p, q) : q \in \mathbb{Q}\} \quad (87)$$

因此命题得证!

1.3.2 第二题

证明: 以 $\mathbb{R}$ 上互不相交的开区间为元素的任意集合为至多可数集。

证明: 若该集合为有限集, 结论显然成立!

若该集合包含无穷多个互不相交的开区间, 在每个开区间内 (a_n, b_n) 选取一个有理数 r_n , 事实上这样的选取是该集合到 $\mathbb{Q}$ 的某子集的双射, 因此未可数集。

原命题得证!

1.3.3 第三题

证明：系数为有理数的多项式构成可数集合。

证明：记系数为有理数的多项式构成集合为 $\mathcal{A}$ ，系数为有理数的 n 次多项式构成集合为 $\mathcal{A}_n$ ，那么

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \quad (88)$$

事实上

$$\mathcal{A}_n = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k : a_k \in \mathbb{Q} \right\} \sim \mathbb{Q}^{n+1} \quad (89)$$

所以

$$\mathcal{A} \sim \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}^{n+1} \quad (90)$$

进而 $\mathcal{A}$ 为可数集合。

1.3.4 第四题

证明： $\mathbb{R}$ 上的单调函数的不连续点至多可数。

证明：对于 $\mathbb{R}$ 上的单调函数 f ，记

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ 为 } f \text{ 的不连续点}\} \quad (91)$$

不妨 f 单调递增，那么对于 $x \in \mathcal{D}$ ，成立 $f(x^-) < f(x^+)$ ，且对于任意 $x \neq y \in \mathcal{D}$ ，成立

$$(f(x^-), f(x^+)) \cap (f(y^-), f(y^+)) = \emptyset \quad (92)$$

于是

$$\mathcal{I} = \{(f(x^-), f(x^+)) : x \in \mathbb{R} \text{ 为 } f \text{ 的不连续点}\} \sim \mathcal{D} \quad (93)$$

构成 $\mathbb{R}$ 上的互不相交的开区间的并，由1.3.2，那么 $\mathcal{I}$ 为至多可数集，于是 $\mathcal{D}$ 为至多可数集。

1.3.5 第五题

证明：对于无穷集合 E ，存在 $F \subset E$ ，使得 $E \sim F$ 且 $E - F$ 可数。

证明：取可数集 $N \subset E$ ，记

$$N = \{p_n : n \in \mathbb{N}^*\} \quad (94)$$

令

$$N_{\text{odd}} = \{p_{2n-1} : n \in \mathbb{N}^*\}, \quad N_{\text{even}} = \{p_{2n} : n \in \mathbb{N}^*\} \quad (95)$$

定义

$$F = E - N_{\text{even}} \quad (96)$$

那么

$$E \sim F \quad (97)$$

且

$$E - F = N_{\text{even}} \sim \mathbb{N}^* \quad (98)$$

原命题得证！

1.3.6 第六题

证明：可数集合的有限子集构成的集族为可数集合。

证明：记可数集合 A 的有限子集构成的集族为 $\mathcal{A}$ ，有 n 个元素的子集构成的集族为 $\mathcal{A}_n$ ，那么

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \quad (99)$$

若要证明 $\mathcal{A}$ 为可数集合，只需证明 $\mathcal{A}_n$ 为可数集合。

当 $n = 1$ 时， $\mathcal{A}_1$ 显然为可数集合。

假设当 $n = k$ 时， $\mathcal{A}_k$ 为可数集合，那么注意到

$$\mathcal{A}_{k+1} = \bigcup_{x \in A} \bigcup_{x \notin A_n \in \mathcal{A}_n} (\{x\} \cup A_n) \quad (100)$$

因此 $\mathcal{A}_{k+1}$ 为可数集合。

由数学归纳法， $\mathcal{A}_n$ 为可数集合，原命题得证！

1.3.7 第七题

证明：如果 $\mathcal{A}$ 是由非蜕化开区间构成的不可数集合，那么存在 $\delta > 0$ ，使得 $\mathcal{A}$ 中存在无穷多个区间的长度大于 δ 。

证明：反证，假设对于任意 $\delta > 0$ ， $\mathcal{A}$ 中不存在无穷多个区间的长度大于 δ ，那么记 $\mathcal{A}_n$ 为 $\mathcal{A}$ 中的长度大于 $\frac{1}{n}$ 的区间构成的集族，于是 $\mathcal{A}_n$ 为有限集合。而

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \quad (101)$$

因此 $\mathcal{A}$ 为至多可数集合，矛盾！因此存在 $\delta > 0$ ，使得 $\mathcal{A}$ 中存在无穷多个区间的长度大于 δ 。

1.3.8 第八题

证明： $\mathbb{R}^3$ 上的有理长方体构成可数集合。

证明：

$$\mathbb{Q} \subset \mathcal{C} \subset \mathbb{Q}^6 \quad (102)$$

1.4 第四节

1.4.1 第一题

证明：无理数集不可数。

证明：若 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 可数，考虑到 $\mathbb{Q}$ 可数，那么 $\mathbb{R}$ 可数，显然矛盾！

1.4.2 第二题

证明：代数数构成可数集合。

证明：由1.3.3，整系数多项式构成的集族 $\mathcal{A}$ 为可数集合，记 $\mathcal{A}_n$ 为整系数 n 次多项式构成的集族，那么由代数基本定理，对于任意 $P(x) \in \mathcal{A}_n$ ， $P(x) = 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上至多存在 n 个根，因此全体代数数 $\mathcal{A}_N$ 满足

$$\mathcal{A}_N = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{P(x) \in \mathcal{A}_n} \{x \in \mathbb{R} : P(x) = 0\} \quad (103)$$

于是代数数集合 $\mathcal{A}_N$ 为可数集合。

1.4.3 第三题

证明：

$$2^{\aleph_0} = \aleph \quad (104)$$

证明：

法一：一方面，定义映射

$$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \rightarrow (0, 1) \quad (105)$$

$$N \mapsto \sum_{n \in N} 10^{-n} \quad (106)$$

容易证明 φ 为单射，因此 $2^{\aleph_0} \leq \aleph$ 。

另一方面，定义映射

$$\psi : (0, 1) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \quad (107)$$

$$x \mapsto \mathbb{Q} \cap (0, x) \quad (108)$$

容易证明 ψ 为单射，因此 $2^{\aleph_0} \geq \aleph$ 。

由Bernstein定理，综合两方面

$$2^{\aleph_0} = \aleph \quad (109)$$

法二：记 $\mathbb{Z}^+$ 的幂集为 $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$ ，即证明

$$\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+) \sim (0, 1] \quad (110)$$

记 $\mathcal{A}$ 为由 $\mathbb{Z}^+$ 中有限元素（至少一个）构成的集合的族，即

$$\mathcal{A} = \{ \{a_1, \dots, a_n\} : a_1 < \dots < a_n \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{Z}^+ \} \quad (111)$$

记 $\mathcal{B}$ 为由 $\mathbb{Z}^+$ 中无限元素构成的集合的族，即

$$\mathcal{B} = \{ \{b_1, b_2, \dots\} : b_1 < b_2 < \dots \in \mathbb{Z}^+ \} \quad (112)$$

那么成立

$$\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+) = \{\emptyset\} \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \quad (113)$$

首先我们来证明族 $\mathcal{A}$ 为可数集合，即证明

$$\text{card}(\mathcal{A}) = \aleph_0 \quad (114)$$

注意到

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \quad (115)$$

其中 $\mathcal{A}_n$ 为由 $\mathbb{Z}^+$ 中 n 个元素构成的集合的族，这里 $n \in \mathbb{Z}^+$ ，即

$$\mathcal{A}_n = \{ \{a_1, \dots, a_n\} : a_1 < \dots < a_n \in \mathbb{Z}^+ \} \quad (116)$$

我们来证明对于每一个 $n \in \mathbb{Z}^+$ ， $\mathcal{A}_n$ 都是可数集合，即

$$\text{card}(\mathcal{A}_n) = \aleph_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad (117)$$

一方面，我们来证明

$$\text{card}(\mathcal{A}_n) \geq \aleph_0 \quad (118)$$

构造映射 $\varphi_1 : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathcal{A}_n$ 为

$$\varphi_1(x) = \{x, x+1, \dots, x+n-1\} \quad (119)$$

任取 $x \neq x' \in \mathbb{Z}^+$ ，显然有

$$\{x, x+1, \dots, x+n-1\} \neq \{x', x'+1, \dots, x'+n-1\} \quad (120)$$

即

$$\varphi_1(x) \neq \varphi_1(x') \quad (121)$$

因此映射 φ_1 为单射，因此

$$\text{card}(\mathcal{A}_n) \geq \text{card}(\mathbb{Z}^+) = \aleph_0 \quad (122)$$

另一方面，我们来证明

$$\text{card}(\mathcal{A}_n) \leq \aleph_0 \quad (123)$$

构造映射 $\varphi_2 : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathbb{Z}^{+n}$ 为

$$\varphi_2(\{a_1, \dots, a_n\}) = (a_1, \dots, a_n) \quad (124)$$

任取

$$\{a_1, \dots, a_n\} \neq \{a'_1, \dots, a'_n\} \in \mathcal{A}_n \quad (125)$$

显然有

$$(a_1, \dots, a_2) \neq (a'_1, \dots, a'_2) \quad (126)$$

即

$$\varphi_2(\{a_1, \dots, a_n\}) \neq \varphi_2(\{a'_1, \dots, a'_n\}) \quad (127)$$

因此映射 φ_2 为单射，因此

$$\text{card}(\mathcal{A}_n) \leq \text{card}(\mathbb{Z}^{+n}) = \aleph_0 \quad (128)$$

由Bernstein定理，成立

$$\text{card}(\mathcal{A}_n) = \aleph_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad (129)$$

因此

$$\text{card}(\mathcal{A}) = \text{card}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n\right) = \aleph_0 \quad (130)$$

其次我们来证明集族 $\mathcal{B}$ 为具有连续基数的集合，即证明

$$\text{card}(\mathcal{B}) = \aleph \quad (131)$$

构造映射 $\psi: \mathcal{B} \rightarrow (0, 1]$ 为

$$\psi(\{b_1, b_2, \dots\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-b_n} \quad (132)$$

我们来证明映射 ψ 为双射。

对于其单射性。任取

$$\{b_1, b_2, \dots\} \neq \{b'_1, b'_2, \dots\} \in \mathcal{B} \quad (133)$$

不妨假设对于任意 $i < j \in \mathbb{Z}^+$ ，成立 $b_i < b_j$ 和 $b'_i < b'_j$ 。注意到存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ ，使得成立

$$b_1 = b'_1, \quad \dots, \quad b_{k-1} = b'_{k-1}, \quad b_k \neq b'_k \quad (134)$$

这里若 $k = 1$ ，那么表示两者第一项不相等，即 $b_1 \neq b'_1$ 。不妨假设 $b_k > b'_k$ ，那么

$$\psi(\{b_1, b_2, \dots\}) \quad (135)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-b_n} \quad (136)$$

$$= \sum_{n=1}^k 2^{-b_n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-b_n} \quad (137)$$

$$\leq \sum_{n=1}^k 2^{-b_n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-(b_k+n-k)} \quad (138)$$

$$= \sum_{n=1}^k 2^{-b_n} + 2^{-b_k} \quad (139)$$

$$\leq \sum_{n=1}^k 2^{-b'_n} \quad (140)$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-b'_n} \quad (141)$$

$$= \psi(\{b'_1, b'_2, \dots\}) \quad (142)$$

因此

$$\psi(\{b_1, b_2, \dots\}) \neq \psi(\{b'_1, b'_2, \dots\}) \quad (143)$$

进而映射 ψ 为单射。

对于其满射性。任取

$$c \in (0, 1] \quad (144)$$

下面寻找 $\{c_1, c_2, \dots\} \in \mathcal{B}$, 使得成立

$$\psi(\{c_1, c_2, \dots\}) = c \quad (145)$$

如果 $c = 1$, 取 $\{c_1, c_2, \dots\} = \mathbb{Z}^+$, 那么

$$\psi(\{c_1, c_2, \dots\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 \quad (146)$$

如果存在 $\mathbb{Z}^+$ 中有限的元素 $c'_1 < \dots < c'_m$, 使得成立

$$\sum_{n=1}^m 2^{-c'_n} = c \quad (147)$$

那么取 $\{c_1, c_2, \dots\} = \{c'_1, \dots, c'_{m-1}, c'_m + 1, c'_m + 2, \dots\}$, 此时成立

$$\psi(\{c_1, c_2, \dots\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-c_n} = \sum_{n=1}^{m-1} 2^{-c'_n} + \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-(c'_m+n-m+1)} = \sum_{n=1}^m 2^{-c'_n} = c \quad (148)$$

注意, 如果 $m = 1$, 那么取 $\{c_1, c_2, \dots\} = \{c'_m + 1, c'_m + 2, \dots\}$ 。

下面考察当 $c \in (0, 1)$ 时, 且不存在 $\mathbb{Z}^+$ 中有限的元素 $c'_1 < \dots < c'_m$, 使得成立

$$\sum_{n=1}^m 2^{-c'_n} = c \quad (149)$$

我们来构造 $\{c_1, c_2, \dots\} \in \mathcal{B}$, 使得

$$\psi(\{c_1, c_2, \dots\}) = c \quad (150)$$

我们进行如下操作。

定义 $C_0 = \emptyset$ 。

第1步, 将区间 $(0, 1)$ 分为三部分 $(0, 2^{-1})$, $(2^{-1}, 1)$, $\{2^{-1}\}$ 。如果 $c \in \{2^{-1}\}$, 即 $c = 2^{-1}$, 那么存在 $\mathbb{Z}^+$ 中有限的元素 $c'_1 = 1$, 使得成立 $2^{-c'_1} = c$, 矛盾! 因此 $c \in (0, 1)$ 且 $c \neq 2^{-1}$, 那么成立或 $c \in (0, 2^{-1})$, 或 $c \in (2^{-1}, 1)$ 。如果 $c \in (0, 2^{-1})$, 那么定义 $C_1 = C_0$; 如果 $c \in (2^{-1}, 1)$, 定义 $C_1 = C_0 \cup \{1\}$ 。

递归的, 假设当 $c \in (\alpha_n, \beta_n)$ 时, 已定义 C_n 。

第 $n+1$ 步, 将区间 (α_n, β_n) 分为三部分 $(\alpha_n, \frac{\alpha_n+\beta_n}{2})$, $(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}, \beta_n)$, $\{\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\}$ 。如果 $c \in \{\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\}$, 即 $c = \frac{\alpha_n+\beta_n}{2}$, 那么存在 $\mathbb{Z}^+$ 中有限的元素, 即集合 $C_n \cup \{n+1\}$ 中的元素, 使得成立

$$\sum_{i \in C_n \cup \{n+1\}} 2^{-i} = c \quad (151)$$

矛盾! 因此 $c \in (\alpha_n, \beta_n)$ 且 $c \neq \frac{\alpha_n+\beta_n}{2}$, 那么成立或 $c \in (\alpha_n, \frac{\alpha_n+\beta_n}{2})$, 或 $c \in (\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}, \beta_n)$ 。如果 $c \in (\alpha_n, \frac{\alpha_n+\beta_n}{2})$, 那么定义 $C_{n+1} = C_n$; 如果 $c \in (\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}, \beta_n)$, 定义 $C_{n+1} = C_n \cup \{n+1\}$ 。

这样操作下去, 我们得到集合列 $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset \mathbb{Z}^+$, 定义

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n \quad (152)$$

显然 $C \subset \mathbb{Z}^+$ 且为可数无穷集合。下面我们来证明

$$\sum_{i \in C} 2^{-i} = c \quad (153)$$

首先证明无穷级数 $\sum_{i \in C} 2^{-i}$ 收敛, 注意到

$$0 < \sum_{i \in C_n} 2^{-i} < \sum_{i \in C_{n+1}} 2^{-i} < \sum_{i \in \mathbb{Z}^+} 2^{-i} = 1 \quad (154)$$

因此

$$\sum_{i \in C} 2^{-i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in C_n} 2^{-i} \quad (155)$$

收敛。

其次证明

$$\sum_{i \in C} 2^{-i} = c \quad (156)$$

注意到

$$\alpha_n = \sum_{i \in C_n} 2^{-i}, \quad \beta_n = 2^{-n} + \sum_{i \in C_n} 2^{-i} \quad (157)$$

同时

$$\alpha_n < c < \beta_n \quad (158)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 成立

$$\sum_{i \in C} 2^{-i} = c \quad (159)$$

那么取 $\{c_1, c_2, \dots\} = C$ 即可满足

$$\psi(\{c_1, c_2, \dots\}) = c \quad (160)$$

进而映射 ψ 为满射。

至此, 我们证明了 ψ 为双射, 因此

$$\text{card}(\mathcal{B}) = \text{card}((0, 1]) = \aleph \quad (161)$$

进而

$$\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)) = \text{card}(\{\emptyset\} \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \aleph \quad (162)$$

即

$$\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+) \sim (0, 1] \quad (163)$$

综上所述, 原命题得证!

1.4.4 第四题

证明: 如果 $\text{card}(A \cup B) = \aleph$, 那么 A, B 之一的基数为 $\aleph$ 。

证明: 由于 $\text{card}(A \cup B) = \aleph$, 那么存在双射 $\varphi: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}^2$ 。若要证明 A, B 之一的基数为 $\aleph$, 只需证明 $\text{card}(\varphi(A)) = \aleph$ 或 $\text{card}(\varphi(B)) = \aleph$, 而容易知道 $\text{card}(\varphi(A)) \leq \aleph$ 且 $\text{card}(\varphi(B)) \leq \aleph$, 因此只需证明 $\text{card}(\varphi(A)) \geq \aleph$ 或 $\text{card}(\varphi(B)) \geq \aleph$ 。

如果对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 成立 $\{(x, y) : y \in \mathbb{R}\} \cap \varphi(A) \neq \emptyset$, 那么取 $(x, y_x) \in \{(x, y) : y \in \mathbb{R}\} \cap \varphi(A)$, 从而 $\{(x, y_x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \varphi(A)$, 因此 $\text{card}(\varphi(A)) \geq \aleph$ 。

如果存在 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使得成立 $\{(x_0, y) : y \in \mathbb{R}\} \cap \varphi(A) = \emptyset$, 那么 $\{(x_0, y) : y \in \mathbb{R}\} \subset \varphi(B)$, 因此 $\text{card}(\varphi(B)) \geq \aleph$ 。

综上所述, 原命题得证!

1.4.5 第五题

记 $\mathcal{F}$ 为 $[0, 1]$ 上的所有实函数构成的函数族, 证明: $\text{card}(\mathcal{F}) = 2^\aleph$ 。

证明: 一方面, 定义映射

$$\varphi: \mathcal{P}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{F} \quad (164)$$

$$E \mapsto \mathbb{1}_E \quad (165)$$

容易证明 φ 为单射, 因此 $\text{card}(\mathcal{F}) \geq 2^\aleph$ 。

另一方面, 定义映射

$$\psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \quad (166)$$

$$f \mapsto \{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\} \quad (167)$$

容易证明 ψ 为单射, 因此 $\text{card}(\mathcal{F}) \leq 2^\aleph$ 。

由 Bernstein 定理, 综合两方面

$$\text{card}(\mathcal{F}) = 2^{\aleph} \tag{168}$$

第二章

2.1 第一节

2.1.1 第一题

2.1.1.1 第一问

证明: $x \in E'$, 当且仅当对于任意包含 x 的邻域 N , 成立 $N \cap E - \{x\} \neq \emptyset$ 。

证明: 充分性由定义显然。

对于必要性, 任取包含 x 的邻域 N , 由于 N 为开集, 那么存在邻域 $N_\delta(x) \subset N$, 且 $N_\delta(x) \cap E - \{x\} \neq \emptyset$, 因此 $N \cap E - \{x\} \neq \emptyset$, 必要性得证!

2.1.1.2 第二问

证明: $x \in E^\circ$, 当且仅当存在包含 x 的邻域 N , 成立 $N \subset E$ 。

证明: 必要性由定义显然。

对于充分性, 取包含 x 的邻域 $N \subset E$, 由于 N 为开集, 那么存在邻域 $N_\delta(x) \subset N \subset E$, 因此 $x \in E^\circ$, 充分性得证!

2.1.2 第二题

令 $E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, 证明:

$$E' = \overline{E} = [0, 1] \quad (169)$$

证明: 只需证明 $E' = [0, 1]$, 这是因为 $\overline{E} = E \cup E'$ 。

任取 $x \in [0, 1]$, 那么由于有理数集的稠密性, 存在 $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subset E$, 使得成立 $p_n \rightarrow x$, 因此 $x \in E'$ 。

任取 $y \in E'$, 那么存在 $\{q_n\}_{n=1}^\infty \subset E$, 使得成立 $q_n \rightarrow y$, 那么由极限的保序性, 可得 $y \in [0, 1]$ 。

综合两方面, $E' = [0, 1]$ 。

2.1.3 第三题

令

$$E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \quad (170)$$

证明:

$$E' = \overline{E} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad (171)$$

证明: 显然!

2.1.4 第四题

令

$$E = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \quad (172)$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (173)$$

证明:

$$E' = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) : y \in [0, 1]\} \quad (174)$$

证明: 任取 $(x, y) \in \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) : y \in [0, 1]\}$, 那么

$$(x, y) = \begin{cases} (0, 0) \\ (x, \sin \frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ (0, y), & y \in [0, 1] \end{cases} \quad (175)$$

如果 $(x, y) = (0, 0)$, 取 $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n\pi}, 0) \rightarrow (0, 0)$, 因此 $(x, y) \in E'$.

如果 $(x, y) = (x, \sin \frac{1}{x})$, 由 f 在 $x \neq 0$ 时的连续性, 存在 $(x_n, y_n) = (x_n, f(x_n)) \rightarrow (x, \sin \frac{1}{x})$, 因此 $(x, y) \in E'$.

如果 $(x, y) = (0, y)$, 其中 $y \in [0, 1]$, 取 $x_0 > 0$ 使得 $\sin \frac{1}{x_0} = y$, 令 $x_n = \frac{1}{x_0 + 2n\pi} \rightarrow 0$, 那么 $(x_n, y) \rightarrow (0, y)$, 因此 $(x, y) \in E'$.

于是

$$E' \supset \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) : y \in [0, 1]\} \quad (176)$$

任取 $(x, y) \in E'$,

2.1.5 第五题

证明: 如果 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为不可数无穷点集, 那么 E' 不为有限集。

证明: 反证, 如果 E' 为有限集, 注意到 $E - E'$ 为孤立集, 其至多为可数集, 那么 $E = E' \cup (E - E')$ 至多为可数集, 矛盾! 因此 E' 不为有限集。

2.2 第二节

2.2.1 第一题

证明: F 为闭集, 当且仅当 $\overline{F} = F$ 。

证明: 注意到

$$\overline{F} = F \iff F = F \cup F' \iff F' \subset F \quad (177)$$

2.2.2 第二题

对于 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f , 证明对于任意 $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((a, \infty))$ 为开集, $f^{-1}([a, \infty))$ 为闭集。

证明: 由 2.2.12, 得证!

2.2.3 第三题

证明: $N_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \delta\}$ 为开集, 且

$$\overline{N}_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq \delta\} \quad (178)$$

证明: 显然且易证!

2.2.4 第四题

对于紧集 K , $F_n \subset K$ 为闭子集序列, 证明: 如果 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, 那么存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得成立 $\bigcap_{n=1}^N F_n = \emptyset$ 。

证明: 由于 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, 那么 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c = \mathbb{R}^n \supset K$, 由开覆盖定理, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得成立 $\bigcup_{n=1}^N F_n^c \supset K$, 于是 $\bigcap_{n=1}^N F_n \subset K^c$, 而 $F_n \subset K$, 因此 $\bigcap_{n=1}^N F_n \subset K$, 于是 $\bigcap_{n=1}^N F_n = \emptyset$ 。

2.2.5 第五题

Lindelof 定理: 集合的任意开邻域覆盖存在可数开邻域覆盖。

证明: 任取集合 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{N}$ 为 E 的开邻域覆盖。对于任意 $x \in E$, 存在 $N_x \in \mathcal{N}$, 使得 $x \in N_x$, 又 E_x 为开集, 那么存在 $\delta > 0$, 使得成立 $N_\delta(x) \subset N_x$ 。取有理点 $r_x \in N_\delta(x)$ 和正有理数 $\delta_x < \delta - |x - r_x|$, 那么 $N_{\delta_x}(r_x) \subset N_\delta(x) \subset N_x$ 。注意到 $E \subset \bigcup_{x \in E} N_{\delta_x}(r_x)$, 且 $\mathbb{R}^n$ 中以有理点为心, 以有理数为半径的开邻域为可数个, 那么 E 存在可数开邻域覆盖。

2.2.6 第六题

证明: 开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 可以表示为 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, 其中 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为不交开长方体族。

证明: 由于 G 为开集, 那么对于任意 $x \in G$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得成立 $N_{\delta_x}(x) \subset G$, 定义

$$I_x = \left\{ y = (y_1, \dots, y_n) : x_k - \frac{\delta_x}{\sqrt{n}} < y_k < x_k + \frac{\delta_x}{\sqrt{n}} \right\} \quad (179)$$

显然 $x \in I_x \subset N_{\delta_x}(x) \subset G$, 且 $G \subset \bigcup_{x \in G} I_x \subset G$, 因此 $G = \bigcup_{x \in G} I_x$, 由2.2.5, 存在可数序列 $\{I_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$, 使得成立 $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{x_n} \subset G$, 因此 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{x_n}$.

2.2.7 第七题

利用Borel有限覆盖定理证明Bolzano-Weierstrass定理。

Borel有限覆盖定理：紧集的开覆盖存在有限子覆盖。

Bolzano-Weierstrass定理：有界无穷点集存在聚点。

证明：反证，假设 E 为有界无穷点集且无聚点，由于 $E' = \emptyset \subset E$, 因此 E 为闭集。由于任意 $x \in E$ 均为 E 的孤立点，那么存在 $\delta_x > 0$, 使得成立 $N_{\delta_x}(x) \cap E = \{x\}$, 所以 $E \subset \bigcup_{x \in E} N_{\delta_x}(x)$, 由Borel有限覆盖定理，存在有限个 $\{x_k\}_{k=1}^n$, 使得成立 $E \subset \bigcup_{k=1}^n N_{\delta_{x_n}}(x_n)$, 于是

$$E = E \cap \left(\bigcup_{k=1}^n N_{\delta_{x_n}}(x_n) \right) = \bigcup_{k=1}^n (E \cap N_{\delta_{x_n}}(x_n)) = \bigcup_{k=1}^n \{x_k\} \quad (180)$$

因此 E 为有限点集，矛盾！

2.2.8 第八题

证明： $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集 G 的基数为 $\aleph$ 。

证明：由于 G 为开集，那么存在 $N_{\delta}(x_0) \subset G$, 容易证明

$$N_{\delta}(x_0) \subset G \subset \mathbb{R}^n \quad (181)$$

且 $N_{\delta}(x_0) \sim \mathbb{R}$ 。

2.2.9 第九题

证明：对于任意 $E \subset \mathbb{R}^n$, 成立

$$\overline{E} = \bigcap_{F \supset E \text{ 为闭集}} F \quad (182)$$

证明：即证明对于任意闭集 $F \supset E$, 成立 $\overline{E} \subset F$, 即证明 $E' \subset F$ 。

任取 $x \in E'$, 那么存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E \subset F$, 使得 $x_n \rightarrow x$, 由于 F 为闭集，那么 $x \in F$, 因此 $E' \subset F$, 原命题得证！

2.2.10 第十题

对于函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 定义

$$w_f(x) = \limsup_{y \rightarrow x} f(y) - \liminf_{y \rightarrow x} f(y), \quad x \in \mathbb{R} \quad (183)$$

证明：对于任意 $\varepsilon > 0$, $G_{\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} : w_f(x) < \varepsilon\}$ 为开集。进而证明： f 的不连续点构成 F_{σ} 集。

证明：不妨设其非空，任取 $x_0 \in G_{\varepsilon}$, 由于 $w_f(x_0) < \varepsilon$, 因此存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$\sup_{|x-x_0|<\delta_0} f(x) - \inf_{|x-x_0|<\delta_0} f(x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (184)$$

对于任意 $x \in N_{\delta_0}(x_0)$, 存在 $\delta_x > 0$, 使得成立 $N_{\delta_x}(x) \subset N_{\delta_0}(x_0)$, 因此

$$\sup_{|y-x|<\delta_x} f(y) - \inf_{|y-x|<\delta_x} f(y) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (185)$$

进而

$$w_f(x) = \limsup_{y \rightarrow x} f(y) - \liminf_{y \rightarrow x} f(y) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (186)$$

于是 $x \in G_{\varepsilon}$, 由 x 的任意性， $N_{\delta_0}(x_0) \subset G_{\varepsilon}$, 进而 G_{ε} 为开集。

f 的不连续点集为

$$\{x \in \mathbb{R} : \lim_{y \rightarrow x} f(y) \neq f(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : w_f(x) \geq \frac{1}{n}\} \quad (187)$$

2.2.11 第十一题

对于 $\alpha \neq 0$, 以及 $G \subset \mathbb{R}^n$, 证明: G 为开集当且仅当 αG 为开集。

证明: 只需证明如果 G 为开集, 那么 αG 为开集。

任取 $\alpha x \in \alpha G$, 于是 $x \in G$, 由于 G 为开集, 那么存在 $\delta > 0$, 使得 $N_\delta(x) \subset G$, 下面我们证明 $N_{\alpha\delta}(\alpha x) \subset \alpha G$. 任取 $\alpha y \in N_{\alpha\delta}(\alpha x)$, 那么 $|\alpha||y - x| < |\alpha|\delta$, 因此 $|y - x| < \delta$, 于是 $y \in N_\delta(x) \subset G$, 进而 $\alpha y \in \alpha G$, 我们可知道 αG 为开集。

2.2.12 第十二题

对于函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 证明: f 连续, 当且仅当开集的原像是开集。

证明: 对于必要性, 如果 f 连续, 任取开集 $G \subset \mathbb{R}$, 任取 $x \in f^{-1}(G)$, 那么 $f(x) \in G$, 由于 G 为开集, 于是存在 $\Delta > 0$, 使得 $N_\Delta(f(x)) \subset G$. 而 f 连续, 于是存在 $\delta > 0$, 使得成立 $f(N_\delta(x)) \subset N_\Delta(f(x)) \subset G$, 因此 $N_\delta(x) \subset f^{-1}(G)$, 进而 G 为开集, 必要性得证!

对于充分性, 如果开集的原像是开集, 任取 $x \in \mathbb{R}^n$, 那么对于任意 $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(N_\varepsilon(f(x)))$ 为开集, 而 $x \in f^{-1}(N_\varepsilon(f(x)))$, 于是存在 $\delta > 0$, 使得 $N_\delta(x) \subset f^{-1}(N_\varepsilon(f(x)))$, 即 $f(N_\delta(x)) \subset N_\varepsilon(f(x))$, 因此对于任意 $y \in N_\delta(x)$, 成立 $f(y) \in N_\varepsilon(f(x))$, 于是 f 在 x 处连续, 由 x 的任意性, f 连续, 充分性得证!

2.2.13 第十三题

对于函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 称 f 是下半连续的, 如果

$$f(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (188)$$

证明: f 是下半连续的, 当且仅当对于任意 $a \in \mathbb{R}$, $[f > a]$ 为开集。

证明: 对于必要性, 如果 f 为下半连续的, 任取 $a \in \mathbb{R}$, 如果 $[f > a]$ 为空, 那么显然为开集。否则取 $x \in [f > a]$, 那么 $\liminf_{y \rightarrow x} f(y) > a$, 因此存在 $\delta > 0$, 使得对于任意 $y \in N_\delta(x)$, 成立 $f(y) > a$, 于是 $[f > a]$ 为开集, 必要性得证!

对于充分性, 任取 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $\varepsilon > 0$, 由于 $[f > f(x) - \varepsilon]$ 为开集, 那么存在 $\delta > 0$, 使得对于任意 $y \in N_\delta(x)$, 成立 $f(y) > a - \varepsilon$, 那么 $\liminf_{y \rightarrow x} f(y) > f(x) - \varepsilon$, 由 ε 的任意性, 成立 $\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x)$, 充分性得证!

2.2.14 第十四题

2.2.14.1 第一问

对于紧集 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \lambda < 1$, 证明: $\lambda A + (1 - \lambda)B$ 为紧集。

证明: 由于 A, B 有界, 那么存在 $R > 0$, 使得 $A, B \subset N_R$, 这里 $N_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. 于是任取 $z \in \lambda A + (1 - \lambda)B$, 存在 $x \in A, y \in B$ 使得成立 $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, 于是 $|z| \leq \lambda|x| + (1 - \lambda)|y| < \lambda R$, 进而 $\lambda A + (1 - \lambda)B$ 有界。

任取 $\lambda A + (1 - \lambda)B$ 的聚点 z , 于是存在 $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \lambda A + (1 - \lambda)B$, 使得 $z_n \rightarrow z$. 同时存在存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A, \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset B$, 使得成立 $z_n = \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n$, 由于 A 有界, 那么 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 存在收敛子列, 不妨仍设为 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 且记 $x_n \rightarrow x$, 由于 A 为闭集, 那么 $x \in A$. 而 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ 均收敛, 于是 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛, 记 $y_n \rightarrow y$, 由于 B 为闭集, 那么 $y \in B$. 因此 $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in \lambda A + (1 - \lambda)B$, 进而 $\lambda A + (1 - \lambda)B$ 为闭集。

综上所述, $\lambda A + (1 - \lambda)B$ 为紧集。

2.2.14.2 第二问

构造无界闭集 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $\lambda A + (1 - \lambda)B$ 不是闭集。

证明: 定义

$$A = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) : x \in (0, \infty) \right\} \quad (189)$$

$$B = \{(-n, 0) : n \in \mathbb{N}^*\} \quad (190)$$

显然 A 和 B 均为闭集, 但是 $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ 不为闭集。事实上

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \left\{ \left(\frac{x-n}{2}, \frac{1}{2x} \right) : x \in (0, \infty), n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad (191)$$

注意到 $(0, \frac{1}{2n}) \in \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, $(0, 0) \notin \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, 但 $(0, \frac{1}{2n}) \rightarrow (0, 0)$, 因此 $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ 不为闭集。

2.3 第三节

2.3.1 第一题

证明: 由实数构成的实数序列构成基数为 $\aleph$ 的集合。

证明: 只需证明由 $(0, 1)$ 中的实数构成的实数序列构成基数为 $\aleph$ 的集合。我们约定对于 $x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$, 如果

$$x = 0.x_1x_2 \cdots x_n, \quad x \geq 1 \quad (192)$$

那么将 x 表示为无穷小数的形式

$$x = 0.x_1x_2 \cdots (x_n - 1)999 \cdots \quad (193)$$

于是 $(0, 1)$ 中的任意实数的表示方法唯一。

记由 $(0, 1)$ 中的实数构成的实数序列族为 $\mathcal{S}$, 构造映射

$$\varphi: \mathcal{S} \rightarrow (0, 1) \quad (194)$$

$$\begin{pmatrix} 0.x_{11}x_{12}x_{13} \cdots \\ 0.x_{21}x_{22}x_{23} \cdots \\ 0.x_{31}x_{32}x_{33} \cdots \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto 0.x_{11}x_{12}x_{21}x_{13}x_{22}x_{31} \cdots \quad (195)$$

容易证明 φ 为双射, 因此 $\mathcal{S} \sim (0, 1)$, 原命题得证!

2.3.2 第二题

2.3.2.1 第一问

证明: 定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数构成基数为 $\aleph$ 的集合。

证明: 一方面, 记定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数族为 $\mathcal{F}$, 构造映射

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F} \quad (196)$$

$$x \mapsto f \equiv x \quad (197)$$

显然 φ 为单射, 于是 $\text{card}(\mathcal{F}) \geq \text{card}(\mathbb{R}) = \aleph$ 。

另一方面, 记实数构成的实数序列族为 $\mathcal{S}$, 构造映射

$$\psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S} \quad (198)$$

$$f \mapsto f(\mathbb{Q}) \quad (199)$$

其中 $f(\mathbb{Q})$ 按 $\mathbb{Q}$ 的给定顺序排列, 我们来证明 ψ 为单射。

如果连续函数 f, g 满足 $\psi(f) = \psi(g)$, 即 $f(\mathbb{Q}) = g(\mathbb{Q})$, 那么任取 $x \in \mathbb{R}$, 如果 $x \in \mathbb{Q}$, 那么 $f(x) = g(x)$; 如果 $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, 那么取 $x_n \in \mathbb{Q}$ 使得成立 $x_n \rightarrow x$, 由于 f, g 连续, 那么 $f(x_n) \rightarrow f(x)$ 且 $g(x_n) \rightarrow g(x)$, 于是 $f(x) = g(x)$ 。因此 $f = g$, 于是 ψ 为单射。

进而由2.3.1, $\text{card}(\mathcal{F}) \leq \text{card}(\mathcal{S}) = \aleph$ 。

综合两方面, 由Bernstein定理, $\text{card}(\mathcal{F}) = \aleph$ 。

2.4 第四节

2.4.1 第一题

证明: $\mathbb{Q}$ 不为 G_δ 集。

证明:

法一：如果 $\mathbb{Q}$ 为 G_δ 集，那么存在开集序列 $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ ，使得成立 $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ ，那么 $\mathbb{Q}^c = \bigcup_{n=1}^\infty G_n^c$ 。由于 $\mathbb{Q}^c$ 为不可数集，那么存在 $k \in \mathbb{N}^*$ ，使得 G_k^c 包含不可数个无理数，于是 G_k 中不包含的无理数为不可数个。

对于开集 G_k ，存在不交开区间 $\{(a_i, b_i)\}$ ，使得 $G_k = \bigcup (a_i, b_i)$ ，不妨 $a_i < b_i \leq a_{i+1}$ 。如果存在 $i_0 \in \mathbb{N}^*$ ，使得 $b_{i_0} < a_{i_0+1}$ ，那么 $(b_{i_0}, a_{i_0+1}) \not\subset G_k$ ，由 $\mathbb{Q}$ 的稠密性， $\mathbb{Q} \not\subset G_k$ ，矛盾！因此对于任意 $i \in \mathbb{N}^*$ ， $b_i = a_{i+1}$ ，于是

$$G_k = \mathbb{R} - \bigcup \{a_i\} \quad (200)$$

于是 G_k 中不包含的无理数至多可数个，矛盾！于是 $\mathbb{Q}$ 不为 G_δ 集。

法二：如果 $\mathbb{Q}$ 为 G_δ 集，那么 $\mathbb{Q}^c$ 为 F_σ 集，即存在闭集序列 $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ ，使得成立 $\mathbb{Q}^c = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ 。又 $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^\infty \{r_n\}$ ，那么

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \left(\bigcup_{n=1}^\infty \{r_n\} \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^\infty F_n \right) \quad (201)$$

因为 F_n 为闭集且 $F_n \subset \mathbb{Q}^c$ ，所以 $\overline{F_n} = F_n$ 无内点，即 F_n 为疏朗集。而单点集 $\{r_n\}$ 亦为疏朗集，所以 $\mathbb{R}$ 为疏朗集的可数并，即第一纲集，与Baire纲定理矛盾！

因此 $\mathbb{Q}$ 不为 G_δ 集。

2.4.2 第二题

证明： $\mathbb{Q}^c$ 不为 F_σ 集。

证明：由2.4.1，显然！

2.4.3 第三题

证明：不存在在 $\mathbb{Q}$ 上连续，在 $\mathbb{Q}^c$ 上不连续的实函数。

证明：由2.2.10和2.4.2，显然！

2.5 第五节

2.5.1 第一题

对于 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，记

$$U_r(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) < r\} \quad (202)$$

证明： $U_r(E)$ 为开集，且 $U_r(E) \supset E$ 。

证明： $U_r(E) \supset E$ 显然。任取 $x \in U_r(E)$ ，令 $\delta = r - d(x, E) > 0$ ，那么对于任意 $y \in N_\delta(x)$ ，成立

$$d(y, E) = \inf_{z \in E} |y - z| \leq \inf_{z \in E} (|x - y| + |x - z|) = |x - y| + d(x, E) < \delta + d(x, E) = r \quad (203)$$

于是 $y \in U_r(E)$ ，因此 $N_\delta(x) \subset U_r(E)$ ，进而 $U_r(E)$ 为开集。

2.5.2 第二题

证明：闭集可表示为开集的可数交。

证明：由2.5.1，该命题蕴含于如下恒等式。

$$F = \bigcap_{n=1}^\infty U_{\frac{1}{n}}(F) \quad (204)$$

2.5.3 第三题

构造无界闭集 A 和 B ，使得对于任意 $x \in A$ 和 $y \in B$ ，成立

$$|x - y| > d(A, B) \quad (205)$$

解：定义

$$A = \{(x, 1/x) : x \in \mathbb{R}^+\} \quad (206)$$

$$B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^+\} \quad (207)$$

那么任取 $(x, 1/x) \in A$, $(y, 0) \in B$, 成立

$$|(x, 1/x) - (y, 0)| = \sqrt{(x-y)^2 + \frac{1}{x^2}} > 0 \quad (208)$$

而

$$d(A, B) \leq |(x, 1/x) - (x, 0)| = \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty) \quad (209)$$

于是

$$|x - y| > d(A, B) \quad (210)$$

2.5.4 第四题

证明: 对于非空不交闭集 F_1 和 F_2 , 存在不交开集 G_1 和 G_2 , 使得成立 $G_1 \supset F_1$ 和 $G_2 \supset F_2$ 。

证明: 由于 F_1 和 F_2 为非空不交闭集, 那么任取 $x \in F_1$ 和 $y \in F_2$, 令 $\delta_x = \frac{1}{2}d(x, F_2) > 0$ 和 $\delta_y = \frac{1}{2}d(y, F_1) > 0$, 作邻域 $N_{\delta_x}(x)$ 和 $N_{\delta_y}(y)$, 定义开集

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} N_{\delta_x}(x), \quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} N_{\delta_y}(y) \quad (211)$$

那么显然成立 $G_1 \supset F_1$ 和 $G_2 \supset F_2$ 。如果存在 $z_0 \in G_1 \cap G_2$, 那么存在 $x_0 \in F_1$ 和 $y_0 \in F_2$, 使得成立

$$z_0 \in N_{\delta_{x_0}}(x_0), \quad z_0 \in N_{\delta_{y_0}}(y_0) \quad (212)$$

不妨 $\delta_{x_0} \geq \delta_{y_0}$, 于是

$$d(x_0, F_2) \leq |x_0 - y_0| \leq |x_0 - z_0| + |y_0 - z_0| < \delta_{x_0} + \delta_{y_0} \leq 2\delta_{x_0} = d(x_0, F_2) \quad (213)$$

矛盾! 因此 G_1 和 G_2 不交。

综上所述, 原命题得证!

2.5.5 第五题

证明: 对于非空集合 $E \subset \mathbb{R}^n$, 函数 $f(x) = d(x, E)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续。

证明: 事实上, f 为 Lipschitz 连续的。

任取 $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, 那么由三角不等式

$$||x - z| - |y - z|| \leq |x - y| \quad (214)$$

对 $z \in E$ 取下确界, 那么

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad (215)$$

于是 f 为 Lipschitz 连续的, 进而 f 为一致连续的。

2.5.6 第六题

证明: 对于 $\mathbb{R}^n$ 上的非空不交闭集 F_0 和 F , 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 f , 使得成立

- $f(\mathbb{R}^n) \subset [0, 1]$
- $f(F_0) = \{0\}$
- $f(F) = \{1\}$

证明: 构造函数

$$f(x) = \frac{d(x, F_0)}{d(x, F_0) + d(x, F)}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (216)$$

由于 F_0 和 F 为非空不交闭集, 那么 $d(x, F_0) + d(x, F) > 0$, 于是 f 为良定义的。由 2.5.5, f 连续。显然 f 满足上述三条性质。

第三章

3.1 第一节

3.1.1 第一题

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 和 $y = (y_1, \dots, y_n)$, 定义和为 $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ 。如果 $G \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 定义 $x + G = \{x + y : y \in G\}$, 证明: $x + G$ 为开集, 且 $|x + G| = |G|$ 。

3.1.2 第二题

对于开区间 $I \subset \mathbb{R}^2$, G 是 I 绕原点旋转 $\frac{\pi}{6}$ 得到的集合, 证明: G 为开集, 且 $|G| = |I|$ 。

3.1.3 第三题

对于开集 $G \subset \mathbb{R}^n$, 定义

$$m^*(G) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : I_n \text{为开区间且} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset G \right\} \quad (217)$$

$$m_*(G) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^N |F_n| : F_n \text{为不交闭区间且} \bigcup_{n=1}^N F_n \subset G \right\} \quad (218)$$

证明: $m^*(G) = m_*(G) = |G|$ 。

证明: 令 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, 其中 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为不交左开右闭区间。

对于 $m^*(G) = |G|$

一方面, 由 $m^*(G)$ 的定义, $|G| \leq m^*(G)$ 。

另一方面, 任取 $\varepsilon > 0$, 取开区间 $I_n \supset G_n$ 满足 $|I_n| \leq |G_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$, 注意到 $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset G$, 且

$$m^*(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |G_n| + \varepsilon = |G| + \varepsilon \quad (219)$$

由 ε 的任意性, $m^*(G) \leq |G|$ 。

综合两方面, $m^*(G) = |G|$ 。

对于 $m_*(G) = |G|$ 。

一方面, 由 $m_*(G)$ 的定义, $|G| \geq m_*(G)$ 。

另一方面, 任取 $\varepsilon > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}^*$, 取闭区间 $F_n \subset G_n$, 满足 $|F_n| \geq |G_n| - \frac{\varepsilon}{2^n}$, 其中 $n = 1, \dots, N$, 注意到 $\{F_n\}_{n=1}^N$ 为不交闭区间, 且 $\bigcup_{n=1}^N F_n \subset G$, 于是

$$m_*(G) \geq \sum_{n=1}^N |F_n| \geq \sum_{n=1}^N |G_n| - \varepsilon \quad (220)$$

由 ε 和 N 的任意性, $m_*(G) \geq |G|$ 。

综合两方面, $m_*(G) = |G|$ 。

3.1.4 第四题

对于开集 $G \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{G}$ 是 G 绕原点旋转 θ 得到的集合, 证明: $\tilde{G}$ 为开集, 且 $|G| = |\tilde{G}|$ 。

3.2 第二节

3.2.1 第一题

对于 $E \subset \mathbb{R}^n$, 证明:

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : I_n \text{ 为开区间且 } \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E \right\} \quad (221)$$

证明: 一方面, 任取 E 的开区间覆盖 $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E$, 由外测度的单调性

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \geq m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) \geq m^*(E) \quad (222)$$

对 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 取下确界

$$m^*(E) \leq \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : I_n \text{ 为开区间且 } \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E \right\} \quad (223)$$

另一方面, 任取开集 $G \supset E$, 那么其可表示为不互相交左开右闭区间之并 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 任取开区间 $I_n \supset J_n$ 满足 $|I_n| < |J_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$, 于是

$$\inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : I_n \text{ 为开区间且 } \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E \right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \sum_{n=1}^{\infty} (|J_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}) = |G| + \varepsilon \quad (224)$$

由 G 和 ε 的任意性, 取下确界可得

$$\inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : I_n \text{ 为开区间且 } \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E \right\} \leq \inf \{|G| : G \supset E \text{ 为开集}\} \quad (225)$$

即

$$\inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : I_n \text{ 为开区间且 } \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E \right\} \leq m^*(E) \quad (226)$$

综合两方面

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : I_n \text{ 为开区间且 } \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E \right\} \quad (227)$$

3.2.2 第二题

证明: 如果 $E \subset \mathbb{R}^n$ 有界, 那么 $m^*(E) < \infty$ 。

证明: 如果 $E \subset \mathbb{R}^n$ 有界, 那么存在闭区间 $I = [-A, A]^n$, 使得成立 $E \subset I$, 因此由外测度的单调性

$$m^*(E) \leq m^*(I) = (2A)^n < \infty \quad (228)$$

3.2.3 第三题

证明: 可数点集的外测度为零。

证明: 任取可数点集 $E = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, 对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 作闭区间列

$$I_k = \left[x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right]^n \quad (229)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 。容易知道 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, 由外测度的单调性

$$m^*(E) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m^*(I_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{(2^n)^k} = \frac{2^n}{2^n - 1} \varepsilon^n \quad (230)$$

由 ε 的任意性, $m^*(E) = 0$ 。

3.2.4 第四题

证明：对于集合 $E \subset \mathbb{R}$ ，以及任意满足 $0 \leq \mu \leq m^*(E)$ 的 μ ，存在 $F \subset E$ ，使得成立 $m^*(F) = \mu$ 。

证明：定义函数

$$f(x) = m^*([-x, x] \cap E), \quad x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad (231)$$

容易知道 f 为单调递增函数，且 $f(0) = 0$ 。

我们先来证明 f 为连续函数。事实上， f 为 Lipschitz 连续函数。

任取 $x \leq y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ，注意到

$$[-y, y] \cap E = ([-y, -x] \cap E) \cup ([-x, x] \cap E) \cup ([x, y] \cap E) \quad (232)$$

那么由外测度的此可数可加性

$$m^*([-y, y] \cap E) \leq m^*([-y, -x] \cap E) + m^*([-x, x] \cap E) + m^*([x, y] \cap E) \leq m^*([-x, x] \cap E) + 2(y - x) \quad (233)$$

从而

$$f(y) - f(x) \leq 2(y - x) \quad (234)$$

那么对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ，成立

$$|f(x) - f(y)| \leq 2|x - y| \quad (235)$$

于是 f 为 Lipschitz 连续函数。

其次如果 $\mu = 0$ ，那么取 $F = \emptyset$ ；如果 $\mu = m^*(E)$ ，那么取 $F = E$ 。

如果 $0 < \mu < m^*(E)$ ，令

$$x_\mu = \sup\{x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} : f(x) \leq \mu\} \quad (236)$$

那么 $f(x_\mu) \leq \mu$ ，如果 $f(x_\mu) < \mu$ ，那么由 f 的连续性，存在 $x'_\mu > x_\mu$ ，使得 $f(x'_\mu) \leq \mu$ ，矛盾！因此 $f(x_\mu) = \mu$ 。此时取 $F = [-x_\mu, x_\mu] \cap E$ 即可。

综上所述，原命题得证！

3.2.5 第五题

对于 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f ，令 $E = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ ，证明： $m^*(E) = 0$ 。

证明：

法一：令 $E_n = \{(x, f(x)) : x \in [n, n+1]\}$ 。由于 f 在 $[n, n+1]$ 上连续，那么 f 在 $[n, n+1]$ 上一致连续。任取 $\varepsilon > 0$ ，存在 $m \in \mathbb{N}^*$ ，使得对于任意满足 $|x - y| \leq \frac{1}{m}$ 的 $x, y \in [n, n+1]$ ，成立 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。因此对于任意 $k = 1, \dots, m$ ，成立

$$\left\{ (x, f(x)) : x \in \left[n + \frac{k-1}{m}, n + \frac{k}{m} \right] \right\} \subset Q_k \quad (237)$$

其中

$$Q_k = \left[n + \frac{k-1}{m}, n + \frac{k}{m} \right] \times \left[f\left(n + \frac{k-1}{m}\right), f\left(n + \frac{k-1}{m}\right) + \varepsilon \right] \quad (238)$$

那么 $E_n \subset \bigcup_{k=1}^m Q_k$ ，因此

$$m^*(E_n) \leq \sum_{k=1}^m m(Q_k) = \varepsilon \quad (239)$$

由 ε 的任意性， $m^*(E_n) = 0$ 。进而由于 $E = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} E_n$ ，因此

$$m^*(E) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} m^*(E_n) = 0 \quad (240)$$

即 $m^*(E) = 0$ 。

法二 (错误) : 记有理数集为 $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, 任取 $\varepsilon > 0$, 由 f 在点 r_n 处的连续性, 存在 $0 < \delta_n < \frac{1}{2}$, 使得当 $x \in [r_n - \delta_n, r_n + \delta_n]$ 时, 成立 $f(x) \in [f(r_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, f(r_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}]$. 因此

$$\{(x, f(x)) : x \in [r_n - \delta_n, r_n + \delta_n]\} \subset [r_n - \delta_n, r_n + \delta_n] \times \left[f(r_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, f(r_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right] \quad (241)$$

注意到

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [r_n - \delta_n, r_n + \delta_n] \quad (242)$$

因此

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [r_n - \delta_n, r_n + \delta_n] \times \left[f(r_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, f(r_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right] \quad (243)$$

进而

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\delta_n \frac{\varepsilon}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \quad (244)$$

由 ε 的任意性

$$m^*(E) = 0 \quad (245)$$

3.2.6 第六题

对于 $E \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\alpha > 0$, 定义

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \quad (246)$$

$$\alpha E = \{\alpha x : x \in E\} \quad (247)$$

证明:

$$m^*(\alpha E) = \alpha^n m^*(E) \quad (248)$$

证明: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 G , 使得 $E \subset G$, 且 $|G| < m^*(E) + \varepsilon$.

首先证明: αG 为开集. 事实上, 对于任意 $x \in \alpha G$, 显然 $\alpha^{-1}x \in G$, 那么存在 $\alpha^{-1}\delta > 0$, 使得成立 $N_{\alpha^{-1}\delta}(\alpha^{-1}x) \subset G$, 要证明 αG 为开集, 只需证明 $N_\delta(x) \subset \alpha G$. , 任取 $y \in N_\delta(x)$, 注意到

$$|x - y| < \delta \iff |\alpha^{-1}x - \alpha^{-1}y| < \alpha^{-1}\delta \iff \alpha^{-1}y \in N_{\alpha^{-1}\delta}(\alpha^{-1}x) \subset G \implies y \in \alpha G \quad (249)$$

于是 αG 为开集.

其次证明: $|\alpha G| = \alpha^n |G|$. 由于 G 为开集, 所以存在互不相交的左开右闭的区间序列 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得成立

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad (250)$$

那么我们只需证明 $\{\alpha I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为互不相交的左开右闭的区间序列, 且

$$\alpha G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha I_n \quad (251)$$

这是因为

$$|\alpha G| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha I_n| = \alpha^n \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \alpha^n |G| \quad (252)$$

我们首先证明 $\{\alpha I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为互不相交的左开右闭的区间序列, 显然 $\{\alpha I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为左开右闭的区间序列. 对于不交性, 如果存在 $i \neq j \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\alpha I_i \cap \alpha I_j \neq \emptyset$, 那么存在 $x \in \alpha I_i \cap \alpha I_j$, 于是 $\alpha^{-1}x \in I_i \cap I_j$, 因此 $I_i \cap I_j \neq \emptyset$, 矛盾! 于是 $\{\alpha I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为互不相交的左开右闭的区间序列.

然后我们来证明

$$\alpha G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha I_n \quad (253)$$

一方面, 对于任意 $x \in \alpha G$, 成立 $\alpha^{-1}x \in G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, 于是存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得成立 $\alpha^{-1}x \in I_k$, 因此 $x \in \alpha I_k$, 进而 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha I_n$, 那么

$$\alpha G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha I_n \quad (254)$$

另一方面, 对于任意 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha I_n$, 存在 $l \in \mathbb{N}^*$, 使得成立 $x \in \alpha I_l$, 于是此 $\alpha^{-1}x \in I_l$, 因此 $\alpha^{-1}x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = G$, 进而 $x \in \alpha G$, 那么

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha I_n \subset \alpha G \quad (255)$$

综合两方面

$$\alpha G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha I_n \quad (256)$$

因此我们证明了 $|\alpha G| = \alpha^n |G|$ 。

再次证明: $\alpha E \subset \alpha G$ 。任取 $x \in \alpha E$, 成立

$$x \in \alpha E \iff \alpha^{-1}x \in E \implies \alpha^{-1}x \in G \iff x \in \alpha G \quad (257)$$

于是 $\alpha E \subset \alpha G$ 。

由外测度的单调性

$$m^*(\alpha E) \leq |\alpha G| = \alpha^n |G| < \alpha^n (m^*(E) + \varepsilon) \quad (258)$$

由 ε 的任意性

$$m^*(\alpha E) \leq \alpha^n m^*(E) \quad (259)$$

由对称性

$$m^*(\alpha E) = \alpha^n m^*(E) \quad (260)$$

原命题得证!

3.2.7 第七题

证明: 如果 $m^*(E) > 0$, 那么存在 $x \in E$, 使得对于任意 $\delta > 0$, 成立

$$m^*(E \cap N(x, \delta)) > 0 \quad (261)$$

证明: 我们采用反证法, 假设对于任意 $x \in E$, 存在 $\delta_x > 0$, 成立

$$m^*(E \cap N(x, \delta_x)) = 0 \quad (262)$$

注意到

$$E \subset \bigcup_{x \in E} (E \cap N(x, \delta_x)) \quad (263)$$

那么由Lindelof定理, 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$, 使得成立

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap N(x_n, \delta_{x_n})) \quad (264)$$

由外测度的单调性

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap N(x_n, \delta_{x_n})) = 0 \quad (265)$$

于是 $m^*(E) = 0$, 矛盾! 因此存在 $x \in E$, 使得对于任意 $\delta > 0$, 成立

$$m^*(E \cap N(x, \delta)) > 0 \quad (266)$$

3.2.8 第八题

证明：外测度在 $\mathbb{R}^2$ 上保持旋转不变性。

3.2.9 第九题

对于 $n \geq 2$, 构造 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 使得成立 $A \cap B = \emptyset$

$$m^*(A \cup B) \neq m^*(A) + m^*(B) \quad (267)$$

3.3 第三节

3.3.1 第一题

举例说明两个不可测集的并、交、差既可以是不可测的, 也可以是可测的。

解：任取不可测集 $S \subset [0, 1]$, 那么

$$S \cup S \notin \mathfrak{M}, \quad S \cap S \notin \mathfrak{M}. \quad (268)$$

3.3.2 第二题

构造单调递减集合序列 $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$, 成立

$$m(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) \quad (269)$$

解：构造单调递减集合序列 $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$

$$E_n = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} I_m^{(n)} \quad (270)$$

其中

$$I_m^{(n)} = (m - \frac{1}{2^{n+1}}, m + \frac{1}{2^{n+1}}) \quad (271)$$

那么

$$m(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n) = m(\mathbb{Z}) = 0 \quad (272)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = \infty \quad (273)$$

满足

$$m(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) \quad (274)$$

3.3.3 第三题

证明：对于任意 $A, B \in \mathfrak{M}$, 成立

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B) \quad (275)$$

证明：注意到由于

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) \quad (276)$$

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \quad (277)$$

$$B = (B - A) \cup (A \cap B) \quad (278)$$

且都为不交并分解, 由测度的可数可加性

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A - B) + m(B - A) + 2m(A \cap B) = m(A) + m(B) \quad (279)$$

3.3.4 第四题

证明：对于任意 $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$, 成立

$$m(\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m(E_n) \quad (280)$$

且如果存在 k , 使得成立

$$m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_k\right) < \infty \quad (281)$$

那么成立

$$m(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} m(E_n) \quad (282)$$

证明:

对于下极限: 任取 $n \in \mathbb{N}^*$, 对于任意 $l \geq n$, 成立

$$\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \subset E_l \quad (283)$$

由测度的单调性

$$m\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m\right) \leq m(E_l) \quad (284)$$

由 l 的任意性

$$m\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m\right) \leq \inf_{l \geq n} m(E_l) \quad (285)$$

两边对 n 取极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m(E_n) \quad (286)$$

由于

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \quad (287)$$

令

$$A_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m \quad (288)$$

那么 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ 为单调递增集合序列, 由下连续性

$$m(\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n) = m(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m(E_n) \quad (289)$$

对于上极限: 任取 $n \in \mathbb{N}^*$, 对于任意 $l \geq n$, 成立

$$\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \supset E_l \quad (290)$$

由测度的单调性

$$m\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\right) \geq m(E_l) \quad (291)$$

由 l 的任意性

$$m\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\right) \geq \sup_{l \geq n} m(E_l) \quad (292)$$

两边对 n 取极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} m(E_n) \quad (293)$$

由于

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \quad (294)$$

令

$$B_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \quad (295)$$

那么 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ 为单调递减集合序列, 且存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得成立 $m(B_k) < \infty$, 由上连续性

$$m(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) = m(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} m(E_n) \quad (296)$$

3.3.5 第五题

证明: 如果 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty \quad (297)$$

那么

$$m(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) = 0 \quad (298)$$

证明: 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty \quad (299)$$

那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} m(E_m) = 0 \quad (300)$$

由于

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \quad (301)$$

令

$$B_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \quad (302)$$

那么 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ 为单调递减集合序列。

注意到, 由单调性

$$m(B_1) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty \quad (303)$$

那么由上连续性及单调性

$$m(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) = m(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} m(E_m) = 0 \quad (304)$$

原命题得证!

3.3.6 第六题

证明: Cantor集 C 为零测集。

在 $[0, 1]$ 上构造无处稠密的非零测完备集, 进而证明: 存在开集 G , 使得 $m(\overline{G}) > m(G)$ 。

证明: 首先我们来证明Cantor集 C 为零测集。

我们知道

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \quad (305)$$

其中每一个 C_n 为

$$C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_k \quad (306)$$

这里 I_k 为长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的闭区间。由测度的单调性

$$m(\mathcal{C}) \leq m(C_n) \leq \sum_{k=1}^{2^n} |I_k| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0 \quad (307)$$

因此 $m(\mathcal{C}) = 0$ 。

其次我们在 $[0, 1]$ 上构造无处稠密的非零测完备集 E 。

作单调递减数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, 1)$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$ 。我们按照如下步骤构造 E 。

定义 $E_0 = [0, 1]$, 构造 $E_1 = [0, \frac{1}{2} - \frac{a_1}{2}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{a_1}{2}, 1]$ 。

递归的, 如果已定义

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} [x_k, y_k] \quad (308)$$

构造

$$E_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{2^n} \left(\left[x_k, \frac{x_k + y_k}{2} - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} \right] \cup \left[\frac{x_k + y_k}{2} + \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}, y_k \right] \right) \quad (309)$$

于是我们得到单调递减集合列 $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$, 定义

$$E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n \quad (310)$$

再次我们来证明 E 为无处稠密的非零测完备集。

非零可测集: E 显然为可测集, 且

$$m(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n > 0 \quad (311)$$

闭集: E 为可数个闭集的交, 显然为闭集。

自密集: 即证明 $E \subset E'$ 。任取 $x \in E$, 我们来寻找 $x_n \in E - \{x\} \rightarrow x$ 。注意到, x 会在每一个 E_n 的某一个闭区间 $I_n^{(x)}$ 里, 任取 $x_n \in I_n^{(x)} - \{x\}$, 那么由于

$$|x_n - x| \leq |I_n^{(x)}| = \frac{1 - \sum_{k=1}^n a_k}{2^n} < \frac{1 - a_1}{2^n} \rightarrow 0 \quad (312)$$

于是 $x \in E'$ 。由 x 的任意性, E 为自密集。

无处稠密集: 即证明 $\overline{E}$ 不包含任意开区间。由于 E 为自密集, 即完备集, 所以 $\overline{E} = E$ 。我们采用反证法, 如果 E 包含某一个开区间 (a, b) , 那么当 n 充分大时, $|I_n| < b - a$, 矛盾! 于是 E 为无处稠密集。

最后我们来构造开集 G , 使得 $m(\overline{G}) > m(G)$ 。

定义 $G = [0, 1] - E$ 为开集。下面我们来证明 $\overline{G} = [0, 1]$ 。

一方面, 注意到 $G \subset [0, 1]$, 于是 $G' \subset [0, 1]$, 进而

$$\overline{G} = G \cup G' \subset [0, 1] \quad (313)$$

另一方面, 若要证明 $[0, 1] \subset \overline{G} = G \cup G'$, 等价于证明 $E \subset G'$ 。任取 $y \in E$, 需要证明 $y \in G'$, 即寻找 $y_n \in G \rightarrow y$ 。

由于 E 不包含任意开区间, 那么对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $y_n \in (y - \frac{1}{n}, y) \cup (y, y + \frac{1}{n})$ 使得 $y_n \in G$, 因此

$$|y_n - y| < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (314)$$

于是 $y \in G'$, 因此 $E \subset G'$, 进而 $[0, 1] \subset \overline{G}$ 。

综合两方面, $\overline{G} = [0, 1]$ 。而

$$m(\overline{G}) = 1 \quad (315)$$

$$m(G) = 1 - m(E) < 1 \quad (316)$$

因此

$$m(\overline{G}) > m(G) \quad (317)$$

综上所述, 原命题得证!

3.3.7 第七题

证明:

$$\mathfrak{B} \subsetneq \mathfrak{M} \quad (318)$$

证明: Cantor集为

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}, c_n \in \{0, 2\} \right\} \quad (319)$$

定义Cantor函数为

$$f : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1] \quad (320)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}} \quad (321)$$

定义

$$\mathcal{C}^* = \left\{ x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}, c_n \in \{0, 2\}; \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m > n, c_m = 2 \right\} \quad (322)$$

定义

$$f^* : \mathcal{C}^* \rightarrow (0, 1] \quad (323)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^{n+1}} \quad (324)$$

下面我们证明 f^* 为严格单调递增Lipschitz连续满射。

单射性: 任取 $x \neq y \in \mathcal{C}^*$, 记

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \quad x_n \in \{0, 2\} \quad (325)$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}, \quad y_n \in \{0, 2\} \quad (326)$$

不妨

$$x_1 = y_1, \dots, x_{k-1} = y_{k-1}, x_k = 0, y_k = 2 \quad (327)$$

这里若 $k = 1$, 则表示两者首项不相等。那么

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \quad (328)$$

$$= \sum_{n=1}^k \frac{x_n}{2^{n+1}} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \quad (329)$$

$$\leq \sum_{n=1}^k \frac{x_n}{2^{n+1}} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad (330)$$

$$= \sum_{n=1}^k \frac{x_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^k} \quad (331)$$

$$= \sum_{n=1}^k \frac{y_n}{2^{n+1}} \quad (332)$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}} \quad (333)$$

$$= f^*(y) \quad (334)$$

因此 f^* 为单射。

单调性和连续性: 任取 $x \neq y \in \mathcal{C}^*$, 记

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \quad x_n \in \{0, 2\} \quad (335)$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}, \quad y_n \in \{0, 2\} \quad (336)$$

不妨

$$x_1 = y_1, \quad \dots, \quad x_{k-1} = y_{k-1}, \quad x_k = 0, \quad y_k = 2 \quad (337)$$

注意到

$$y - x = \sum_{n=k}^{j-1} \frac{2}{3^n} + \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \quad (338)$$

$$> \frac{2}{3^k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \quad (339)$$

$$= \frac{1}{3^k} \quad (340)$$

$$> 0 \quad (341)$$

$$f^*(y) - f^*(x) = \frac{1}{2^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \quad (342)$$

$$> \frac{1}{2^k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad (343)$$

$$= 0 \quad (344)$$

于是 f 严格单调递增。同时

$$f^*(y) - f^*(x) = \frac{1}{2^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \quad (345)$$

$$< \frac{1}{2^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad (346)$$

$$= \frac{1}{2^{k-1}} \quad (347)$$

于是

$$|f^*(x) - f^*(y)| < 3 \left(\frac{3}{2} \right)^{k-1} |x - y| \quad (348)$$

容易证明, f 将Borel集映成Borel集。事实上, 对于任意开区间 $(a, b) \subset [0, 1]$, 成立 $f((a, b)) = (f(a), f(b)) \subset [0, 1]$;
对于任意 $E \subset [0, 1]$, 成立 $f(E^c) = [0, 1] - f(E)$; 对于任意 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1]$, 成立

$$f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_n) \quad (349)$$

取Vitaly集 $I \subset [0, 1]$, 任取可测 $E \subset I$, 那么 E 为零测集; 若不然,

3.3.8 第八题

对于 $E \subset \mathbb{R}^n$, 定义外测度为

$$m^*(E) = \inf\{m(G) : G \supset E \text{ 为开集}\} \quad (350)$$

定义内测度为

$$m_*(E) = \sup\{m(F) : F \subset E \text{ 为紧集}\} \quad (351)$$

证明: 如果 E 为有界集, 那么 E 可测当且仅当 $m^*(E) = m_*(E)$ 。

证明: 对于必要性, 如果 E 有界可测, 那么由 3.3.9, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$ 和紧集 $F \subset E$, 使得成立 $m(G) < m(F) + \varepsilon$, 那么

$$m(F) \leq m_*(E) \leq m(E) \leq m^*(E) \leq m(G) \leq m(F) + \varepsilon \quad (352)$$

由 ε 的任意性, $m^*(E) = m_*(E)$ 。

必要性得证!

对于充分性, 如果 E 有界, 由 $m^*(E)$ 和 $m_*(E)$ 的定义, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在开集 $G_n \supset E$ 和紧集 $F_n \subset E$, 使得 $m(G_n) < m^*(E) + \frac{1}{2n}$, $m_*(E) < m(F_n) + \frac{1}{2n}$, 那么 $m(G_n - F_n) < \frac{1}{n}$, 令

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n, \quad F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad (353)$$

注意到

$$G - F = G \cap F^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n \cap F_n^c) \subset (G_n \cap F_n^c) = G_n - F_n \quad (354)$$

那么

$$m(G - F) \leq m(G_n - F_n) = \frac{1}{n} \quad (355)$$

由 n 的任意性, $m(G - F) = 0$, 因此 E 为可测集。

充分性得证!

3.3.9 第九题

证明: $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$ 和闭集 $F \subset E$, 使得成立 $m(G - F) < \varepsilon$ 。

证明: 对于必要性, 假设 E 可测, 任取 $\varepsilon > 0$ 。

如果 E 为有界集, 那么由外测度的定义, 存在开集 $G \supset E$, 使得成立 $m(G) < m(E) + \varepsilon$, 因此 $m(G - E) < \varepsilon$ 。

如果 E 为无界集, 定义 $E_n = E \cap B(n)$, 那么由外测度的定义, 存在开集 $G_n \supset E_n$, 使得成立 $m(G_n) < m(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$, 因此 $m(G_n - E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ 。令 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ 为开集, 于是

$$m(G - E) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - E_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n - E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \quad (356)$$

进而对于可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 存在开集 $G \supset E$, 使得成立 $m(G - E) < \varepsilon$ 。

那么对于 E^c , 存在闭集 $F \subset E$, 使得成立 $m(E - F) = m(F^c - E^c) < \varepsilon$, 进而

$$m(G - F) = m((G - E) \cup (E - F)) \leq m(G - E) + m(E - F) < 2\varepsilon \quad (357)$$

必要性得证!

对于充分性, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在开集 $G_n \supset E$ 和闭集 $F_n \subset E$, 使得成立 $m(G_n - F_n) < \frac{1}{n}$, 令

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n, \quad F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad (358)$$

注意到

$$G - F = G \cap F^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n \cap F_n^c) \subset (G_n \cap F_n^c) = G_n - F_n \quad (359)$$

那么

$$m(G - F) \leq m(G_n - F_n) = \frac{1}{n} \quad (360)$$

由 n 的任意性, $m(G - F) = 0$, 因此 E 为可测集。

充分性得证!

3.3.10 第十题

证明: $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在集合 $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$, 使得成立 $E_1 \subset E \subset E_2$, 且 $m(E_2 - E_1) < \varepsilon$ 。

证明: 由3.3.9, 必要性显然。

对于充分性, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $G_n \supset E$ 和 $F_n \subset E$, 使得成立 $m(G_n - F_n) < \frac{1}{n}$, 令

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n, \quad F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad (361)$$

注意到

$$G - F = G \cap F^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n \cap F_n^c) \subset (G_n \cap F_n^c) = G_n - F_n \quad (362)$$

那么

$$m^*(G - F) \leq m^*(G_n - F_n) = \frac{1}{n} \quad (363)$$

同时

$$m^*(G - E) \leq m^*(G - F) = \frac{1}{n} \quad (364)$$

$$m^*(E - F) \leq m^*(G - F) = \frac{1}{n} \quad (365)$$

由 n 的任意性

$$m^*(G - F) = m^*(G - E) = m^*(E - F) = 0 \quad (366)$$

于是 $G - F, G - E, E - F$ 均可测。又 $E = G - (G - E)$, 于是 E 可测。

充分性得证!

3.3.11 第十一题

证明: 如果 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ 为单调递增集合序列, 那么

$$m^*\left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m^*(E_n) \quad (367)$$

证明: 一方面, 注意到, 对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$, 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset E_k \quad (368)$$

那么

$$m^*\left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n\right) \geq m^*(E_k) \quad (369)$$

对 k 求极限

$$m^*\left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} m^*(E_n) \quad (370)$$

另一方面, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 以及任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在开集 $G_n \supset E_n$, 使得成立

$$m(G_n) < m^*(E_n) + \varepsilon \quad (371)$$

令

$$A_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} G_m \quad (372)$$

那么 $\{A_n\}$ 为单调递增的可测集合列, 由上连续性

$$m(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) \quad (373)$$

注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} G_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \quad (374)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} G_m\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m(G_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m^*(E_n) + \varepsilon \quad (375)$$

于是

$$m^*(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n) \leq m(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m^*(E_n) + \varepsilon \quad (376)$$

由 ε 的任意性

$$m^*(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m^*(E_n) \quad (377)$$

综合两方面

$$m^*(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m^*(E_n) \quad (378)$$

原命题得证!

3.3.12 第十二题

证明: 对于 $E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, 那么 $\alpha E \in \mathfrak{M}$, 且 $m(\alpha E) = \alpha^n m(E)$ 。

证明: 由3.2.6, 只需证明 $\alpha E \in \mathfrak{M}$ 。

由于 E 可测, 存在 G_δ 型集 G 和 F_σ 型集 F , 使得成立 $F \subset E \subset G$, 且 $m(G - F) = 0$ 。注意到 αG 为 G_δ 型集, αF 为 F_σ 型集, 且 $\alpha F \subset \alpha E \subset \alpha G$, 同时

$$m(\alpha G - \alpha F) = m(\alpha(G - F)) = \alpha^n m(G - F) = 0 \quad (379)$$

于是 αE 可测!

3.3.13 第十三题

对于 n 阶矩阵 A , 将 $x \in \mathbb{R}^n$ 表示为列向量, 对于 $E \subset \mathbb{R}^n$, 定义

$$AE = \{Ax : x \in E\} \quad (380)$$

证明: 对于可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, AE 为可测集, 且

$$m(AE) = |\det(A)|m(E) \quad (381)$$

证明: 我们首先来证明

$$m^*(AE) = |\det(A)|m^*(E) \quad (382)$$

分为三步。

第一, 对于区间 $I \subset \mathbb{R}^n$, 由区间体积的积分定义, 成立

$$|AI| = |\det(A)||I| \quad (383)$$

第二, 对于开集 $G \subset \mathbb{R}^n$, 我们先来证明 AG 为开集, 任取 $x \in AG$, 那么 $A^{-1}x \in G$, 于是存在 $\frac{\delta}{\det(A)} > 0$, 使得成立 $N_{\frac{\delta}{\det(A)}}(A^{-1}x) \subset G$ 。要证明 AG 为开集, 只需证明 $N_\delta(x) \subset AG$, 任取 $y \in N_\delta(x)$, 那么

$$|x - y| < \delta \iff \quad (384)$$

3.3.14 第十四题

如果 f 是 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上的单叶解析函数, 即 f 在 $\mathbb{D}$ 上为单值全纯函数, 且 $f : \mathbb{D} \rightarrow f(\mathbb{D})$ 是双射, 证明:

$$m(f(\mathbb{D})) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dz \quad (385)$$

3.3.15 第十五题

证明:

$$\text{card}(\mathfrak{M}) = 2^{\aleph} \quad (386)$$

证明: 一方面, 构造映射

$$\varphi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \quad (387)$$

$$E \mapsto E \quad (388)$$

显然 φ 为单射, 那么

$$\text{card}(\mathfrak{M}) \leq 2^{\aleph} \quad (389)$$

另一方面, 构造映射

$$\psi : \mathcal{P}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathfrak{M} \quad (390)$$

$$E \mapsto E \times \{0\}^{n-1} \quad (391)$$

其中 $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ 为Cantor集。

注意到

$$\text{card}(\mathcal{C}) = \aleph, \quad m(\mathcal{C}) = 0 \quad (392)$$

因此

$$m(\mathcal{C} \times \{0\}^{n-1}) = m(\mathcal{C})m(\{0\}^{n-1}) = 0 \quad (393)$$

由于, 对于任意 $E \subset \mathcal{C}$, $m^*(E \times \{0\}^{n-1}) \leq m^*(\mathcal{C} \times \{0\}^{n-1}) = 0$, 因此 $E \times \{0\}^{n-1} \in \mathfrak{M}$, ψ 是良定义的。

显然 ψ 为单射, 那么

$$2^{\aleph} \leq \text{card}(\mathfrak{M}) \quad (394)$$

综合两方面, 由Bernstein定理

$$\text{card}(\mathfrak{M}) = 2^{\aleph} \quad (395)$$

原命题得证!

3.3.16 第十六题

证明: 闭集存在等测度的完备子集, 即对于任意闭集 $F \subset \mathbb{R}^n$, 存在完备集 $P \subset F$, 使得成立 $m(P) = m(F)$ 。

证明: 我们先来构造 P 。

任取闭集 $F \subset \mathbb{R}^n$, 定义

$$E = \{x \in F : \text{存在 } \delta > 0, \text{ 使得 } N_{\delta}(x) \cap F \text{ 至多可数}\} \quad (396)$$

下面证明 $m(E) = 0$ 。

任取 $x \in E$, 那么存在 $\delta_x > 0$, 使得 $N_{\delta_x}(x) \cap F$ 至多可数。注意到

$$E \subset \bigcup_{x \in E} N_{\delta_x}(x) \quad (397)$$

由Lindorf定理, 存在至多可数 $x_n \in E$, 使得成立

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\delta_{x_n}}(x_n) \quad (398)$$

因为

$$E = E \cap F \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\delta_{x_n}}(x_n) \right) \cap F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (N_{\delta_{x_n}}(x_n) \cap F) \quad (399)$$

而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} (N_{\delta_{x_n}}(x_n) \cap F)$ 至多可数, 那么 E 至多可数, 因此 $m(E) = 0$ 。

令 $P = F - E$, 那么满足 $m(P) = m(F)$ 。

下面证明 P 为完备集, 即证明 P 为自密闭集。

P 为自密闭: 即证明 $P \subset P'$ 。任取 $x \in P$, 那么 $x \notin E$, 因此对于任意 $\delta > 0$, $N_{\delta}(x) \cap F = (N_{\delta}(x) \cap P) \cup (N_{\delta}(x) \cap E)$ 为不可数无穷集, 而 E 为至多可数集, 因此 $N_{\delta}(x) \cap P$ 为不可数无穷集, 进而 $x \in P'$, P 为自密闭集。

P 为闭集: 即证明 $P' \subset P$ 。任取 $x \in P' \subset F'$, 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P$, 使得成立 $x_n \rightarrow x$ 。

如果 $x \notin P$, 由于 F 为闭集, 那么 $x \in F$, 于是 $x \in E$, 因此存在 $\delta_x > 0$, 使得 $N_{\delta_x}(x) \cap F$ 至多可数。

当 n 充分大时, 成立 $|x_n - x| < \frac{\delta_x}{2}$ 。注意到, 当 $y \in N_{\frac{\delta_x}{2}}(x_n)$ 时, 成立

$$|y - x| \leq |y - x_n| + |x_n - x| < \frac{\delta_x}{2} + \frac{\delta_x}{2} = \delta_x \quad (400)$$

于是 $N_{\frac{\delta_x}{2}}(x_n) \subset N_{\delta_x}(x)$, 因此 $(N_{\frac{\delta_x}{2}}(x_n) \cap F) \subset (N_{\delta_x}(x) \cap F)$, 进而 $N_{\frac{\delta_x}{2}}(x_n) \cap F$ 至多可数, 这与 $x_n \in P$ 矛盾!

于是 $x \in P$, 因此 P 为闭集。

至此我们得到 P 为完备集。综上所述, 原命题得证!

3.3.17 第十七题

定义集合和为

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\} \quad (401)$$

对于紧集 $A, B \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$, 记

$$A_1 = A \cap (-\infty, x], \quad A_2 = A \cap [x, +\infty) \quad (402)$$

$$B_1 = B \cap (-\infty, y], \quad B_2 = B \cap [y, +\infty) \quad (403)$$

证明:

$$m(A + B) \geq m(A_1 + B_1) + m(A_2 + B_2) \quad (404)$$

证明: 首先我们证明 $A + B, A_1 + B_1, A_2 + B_2$ 为可测集。

由 2.2.14, 由于 A 和 B 为紧集, 那么 $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}(A + B)$ 为紧集, 进而为可测集。由 3.3.13, $A + B$ 为可测集。同理, $A_1 + B_1$ 和 $A_2 + B_2$ 均为可测集。

其次我们证明

$$(A_1 + B_1) \cup (A_2 + B_2) \subset A + B \quad (405)$$

事实上

$$A_1 + B_1 = (A \cap (-\infty, x]) + (B \cap (-\infty, y]) \subset A + B \quad (406)$$

$$A_2 + B_2 = (A \cap [x, +\infty)) + (B \cap [y, +\infty)) \subset A + B \quad (407)$$

因此

$$(A_1 + B_1) \cup (A_2 + B_2) \subset A + B \quad (408)$$

最后我们证明

$$m((A_1 + B_1) \cup (A_2 + B_2)) = m(A_1 + B_1) + m(A_2 + B_2) \quad (409)$$

由 3.3.3, 只需证明

$$m((A_1 + B_1) \cap (A_2 + B_2)) = 0 \quad (410)$$

事实上, 如果 $(A_1 + B_1) \cap (A_2 + B_2) = \emptyset$, 结论显然成立。

假设 $(A_1 + B_1) \cap (A_2 + B_2) \neq \emptyset$, 任取 $z \in (A_1 + B_1) \cap (A_2 + B_2)$, 那么存在 $a_1, a_2 \in A$ 和 $b_1, b_2 \in B$ 满足

$$a_1 \leq x \leq a_2, \quad b_1 \leq y \leq b_2 \quad (411)$$

使得成立

$$z = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \quad (412)$$

注意到

$$a_1 + b_1 \leq x + y \leq a_2 + b_2 = a_1 + b_1 \quad (413)$$

于是 $a_1 = a_2 = x$ 且 $b_1 = b_2 = y$, 因此 $z = x + y$, 从而

$$m((A_1 + B_1) \cap (A_2 + B_2)) = m(\{x + y\}) = 0 \quad (414)$$

综合以上三点, 我们得到

$$m(A + B) \geq m((A_1 + B_1) \cup (A_2 + B_2)) = m(A_1 + B_1) + m(A_2 + B_2) \quad (415)$$

原命题得证!

注意, 我们需要保证 A, B 的紧致性, 因为可测集对和运算并不封闭。事实上, 令 $A \subset \mathbb{R}$ 为不可测集, 显然 $A \times \{0\}$ 和 $\{0\} \times \mathbb{R}$ 为零测集, 但是 $A \times \{0\} + \{0\} \times \mathbb{R} = A \times \mathbb{R}$ 为不可测集。

3.3.18 第十八题

对于紧集 $A, B \subset \mathbb{R}$, 证明:

$$m(A + B) \geq m(A) + m(B) \quad (416)$$

证明: 由 3.3.17, 取 $M > 0$ 满足 $A, B \subset (-M, M)$, 那么令

$$A_1 = A \cap (-\infty, M] = A, \quad A_2 = A \cap [M, +\infty) = \emptyset \quad (417)$$

$$B_1 = B \cap (-\infty, -M] = \emptyset, \quad B_2 = B \cap [-M, +\infty) = B \quad (418)$$

于是

$$m(A + B) \geq m(A_1 + B_1) + m(A_2 + B_2) = m(A) + m(B) \quad (419)$$

原命题得证!

3.3.19 第十九题

对于紧集 $A, B \subset \mathbb{R}$, 以及 $\lambda \in (0, 1)$, 证明:

$$m(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq m(A) + (1 - \lambda)m(B) \quad (420)$$

证明: 由 2.2.11, 由于 A 和 B 为闭集, 那么 λA 和 $(1 - \lambda)B$ 为闭集; 而显然由于 A 和 B 为有界集, 那么 λA 和 $(1 - \lambda)B$ 为有界集, 所以 λA 和 $(1 - \lambda)B$ 为紧集。

由 3.2.6 和 3.3.18

$$m(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq m(\lambda A) + m((1 - \lambda)B) = m(A) + (1 - \lambda)m(B) \quad (421)$$

3.3.20 第二十题

证明: 非零可测集存在不可测子集。

证明:

3.4 第四节

3.4.1 第一题

构造 E_x , 使 $E_x \notin \mathfrak{M}(\mathbb{R}^q)$, 其中 $E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^{p+q})$, $x \in \mathbb{R}^p$ 。

解: 令 $S \in \mathcal{P}((0, 1)) - \mathfrak{M}((0, 1))$, $E = \{0\} \times S \subset \{0\} \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ 。

由于 $m^*(E) \leq m^*(\{0\} \times (0, 1)) = m^*(\{0\})m^*((0, 1)) = 0$, 所以 $m^*(E) = 0$, 于是 $E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^2)$ 。

取 $x = 0$, 那么 $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (0, y) \in E\} = S \notin \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ 。

3.4.2 第二题

构造开集 $G \subset \mathbb{R}^2$, 使得 $m(\partial G) > 0$.

解: 由3.3.6, 取该开集为 $G_0 \subset (0, 1)$, 使得

$$m(\overline{G_0}) > m(G_0) \quad (422)$$

定义 $G = G_0 \times (0, 1)$ 为开集, 因此 G 可测, $\partial G = \overline{G} - G^\circ$ 可测.

我们现在来证明 $\partial G_0 \times (0, 1) \subset \partial G$, 即任取 $(x, y) \in \partial G_0 \times (0, 1)$, 证明 $(x, y) \in \partial G$, 等价于对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $(x_\varepsilon^{(1)}, y_\varepsilon^{(1)})$ 和 $(x_\varepsilon^{(2)}, y_\varepsilon^{(2)})$ 满足

$$(x_\varepsilon^{(1)}, y_\varepsilon^{(1)}) \in G \cap N_\varepsilon((x, y)) - \{(x, y)\} \quad (423)$$

$$(x_\varepsilon^{(2)}, y_\varepsilon^{(2)}) \in G^c \cap N_\varepsilon((x, y)) - \{(x, y)\} \quad (424)$$

任取 $\varepsilon > 0$, 由于 $x \in \partial G_0$, 那么存在 $x_\varepsilon^{(1)}$ 和 $x_\varepsilon^{(2)}$ 满足

$$x_\varepsilon^{(1)} \in G_0 \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) - \{x\} \quad (425)$$

$$x_\varepsilon^{(2)} \in G_0^c \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) - \{x\} \quad (426)$$

令 $y_\varepsilon^{(1)} = y_\varepsilon^{(2)} = y$, 那么

$$(x_\varepsilon^{(1)}, y_\varepsilon^{(1)}) \in (G_0 \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)) \times \{y\} - \{(x, y)\} \quad (427)$$

$$= (G_0 \times \{y\}) \cap ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times \{y\}) - \{(x, y)\} \quad (428)$$

$$\subset G \cap N_\varepsilon((x, y)) - \{(x, y)\} \quad (429)$$

$$(x_\varepsilon^{(2)}, y_\varepsilon^{(2)}) \in (G_0^c \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)) \times \{y\} - \{(x, y)\} \quad (430)$$

$$= (G_0^c \times \{y\}) \cap ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times \{y\}) - \{(x, y)\} \quad (431)$$

$$\subset G \cap N_\varepsilon((x, y)) - \{(x, y)\} \quad (432)$$

于是 $\partial G_0 \times (0, 1) \subset \partial G$.

进而我们得到

$$m(\partial G) \geq m(\partial G_0 \times (0, 1)) = m(\partial G_0)m((0, 1)) = m(\partial G_0) = m(\overline{G_0}) - m(G_0) > 0 \quad (433)$$

3.4.3 第三题

证明: 如果 $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{p+q})$, 那么对于任意 $x \in \mathbb{R}^p$ 以及 $y \in \mathbb{R}^q$, 成立 $E_x \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^q)$ 且 $E^y \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p)$.

3.4.4 第四题

证明: $\mathfrak{B} \subsetneq \mathfrak{M}$

3.5 第五节

3.5.1 第一题

证明: 保距映射满足如下性质.

3.5.2 第二题

证明: 对于 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, 那么 f 为保距映射当且仅当如下条件之一成立:

- 存在 $a, b \in \mathbb{C}$, 其中 $|b| = 1$, 使得对于任意 $z \in \mathbb{C}$, 成立 $f(z) = a + bz$.
- 存在 $a, b \in \mathbb{C}$, 其中 $|b| = 1$, 使得对于任意 $z \in \mathbb{C}$, 成立 $f(z) = a + b\bar{z}$.

证明: 充分性显然.

对于必要性, 如果 f 为保距映射, 任取 $z, w \in \mathbb{C}$, 成立

$$|f(w) - f(z)| = |w - z| \quad (434)$$

令 $w \rightarrow z$ 但 $w \neq z$, 那么

$$\lim_{w \rightarrow z} \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \right| = 1 \tag{435}$$

第四章

4.1 第一节

4.1.1 第一题

证明：可测集 E 上的简单函数的和与积还是 E 上的简单函数。

证明：我们首先来证明两个引理。

引理1： 如果 $A \cap B = \emptyset$, 那么

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \quad (436)$$

引理2：

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \quad (437)$$

引理1的证明： 对于 $x \in A$

$$\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 1 = 1 + 0 = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) \quad (438)$$

对于 $x \in B$

$$\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 1 = 0 + 1 = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) \quad (439)$$

对于 $x \in (A \cup B)^c$

$$\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = 0 = 0 + 0 = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) \quad (440)$$

因此

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \quad (441)$$

引理1得证!

引理2的证明： 对于 $x \in A \cap B$

$$\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1 = 1 \times 1 = \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(x) \quad (442)$$

对于 $x \in A - B$

$$\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 0 = 1 \times 0 = \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(x) \quad (443)$$

对于 $x \in B - A$

$$\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 0 = 0 \times 1 = \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(x) \quad (444)$$

对于 $x \in (A \cup B)^c$

$$\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 0 = 0 \times 0 = \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(x) \quad (445)$$

因此

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \quad (446)$$

引理2得证!

我们回到原题。将可测集 E 划分为互不相交的可测子集之并

$$E = \bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{j=1}^m J_j \quad (447)$$

记简单函数为

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{I_i}, \quad \psi = \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{J_j} \quad (448)$$

记 $E_{ij} = I_i \cap J_j$, 成立如果 $(i, j) \neq (k, l)$, 那么 $E_{ij} \cap E_{kl} = \emptyset$ 。下面我们来证明

$$\varphi + \psi = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mathbb{1}_{E_{ij}} \quad (449)$$

$$\varphi\psi = \sum_{i,j} a_i b_j \mathbb{1}_{E_{ij}} \quad (450)$$

注意到

$$I_i = \bigcup_{j=1}^m E_{ij}, \quad J_j = \bigcup_{i=1}^n E_{ij} \quad (451)$$

由引理

$$\mathbb{1}_{I_i} = \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{E_{ij}}, \quad \mathbb{1}_{J_j} = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{E_{ij}} \quad (452)$$

$$\mathbb{1}_{I_i} \mathbb{1}_{J_j} = \mathbb{1}_{E_{ij}} \quad (453)$$

因此

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{I_i} + \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{J_j} \quad (454)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{E_{ij}} + \sum_{j=1}^m b_j \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{E_{ij}} \quad (455)$$

$$= \sum_{i,j} a_i \mathbb{1}_{E_{ij}} + \sum_{i,j} b_j \mathbb{1}_{E_{ij}} \quad (456)$$

$$= \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mathbb{1}_{E_{ij}} \quad (457)$$

$$\varphi\psi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{I_i} \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{J_j} \quad (458)$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j \mathbb{1}_{I_i} \mathbb{1}_{J_j} \quad (459)$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j \mathbb{1}_{E_{ij}} \quad (460)$$

综上所述，原命题得证！

4.1.2 第二题

证明：对于可测集 E 和 F ，如果 f 既为 E 上的非负可测函数，也为 F 上的非负可测函数时，那么 f 为 $E \cup F$ 上的非负可测函数。

证明：原命题蕴含于如下事实

$$(E \cup F)[f > a] = E[f > a] \cup F[f > a] \quad (461)$$

这是因为

$$x \in (E \cup F)[f > a] \quad (462)$$

$$\iff x \in E \cup F \text{ 且 } f(x) > a \quad (463)$$

$$\iff x \in E \text{ 且 } f(x) > a, \text{ 或 } x \in F \text{ 且 } f(x) > a \quad (464)$$

$$\iff x \in E[f > a] \text{ 或 } x \in F[f > a] \quad (465)$$

$$\iff x \in E[f > a] \cup F[f > a] \quad (466)$$

4.1.3 第三题

证明：对于有限测度的可测集 E ，如果 f 是 E 上的几乎处处有限的非负可测函数，那么对于任意 $\varepsilon > 0$ ，存在闭集 $F \subset E$ ，使得成立 $m(E - F) < \varepsilon$ ，且 f 在 F 上有界。

证明：定义 $A_n = E[f > n]$ ， $B = E[f = \infty]$ ，那么 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递减可测集序列，且 $A_n \rightarrow B$ ，又 $m(A_n) \leq m(E) < \infty$ ，那么由上连续性

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = m(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = m(B) = 0 \quad (467)$$

那么任取 $\varepsilon > 0$ ，存在 $k \in \mathbb{N}^*$ ，使得 $m(A_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ 。令 $E_0 = E[0 \leq f \leq k] = E - A_k$ ，显然 E_0 为可测集，那么存在开集 $G \supset E_0$ 和闭集 $F \subset E_0$ ，使得

$$m(G - F) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (468)$$

进而 f 在闭集 F 有界, 且

$$E - F \subset (G - F) \cup A_k \quad (469)$$

那么

$$m(E - F) \leq m(G - F) + m(A_k) < \varepsilon \quad (470)$$

原命题得证!

4.1.4 第四题

对于可测集 E 上的非负可测函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, 证明: 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E[f_n > \varepsilon]) < \infty \quad (471)$$

那么在 E 上几乎处处成立 $f_n \rightarrow 0$ 。

这一命题的逆命题是否成立?

证明: 定义

$$E_0 = \{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0\} \quad (472)$$

即证明 $m(E - E_0) = 0$ 。

首先由1.1.8

$$E_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E \left[f_n \leq \frac{1}{k} \right] \quad (473)$$

由于

$$E - E_0 = E \cap E_0^c = E \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E \left[f_n \leq \frac{1}{k} \right] \right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E \left[f_n > \frac{1}{k} \right] \quad (474)$$

因此

$$m(E - E_0) = m \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E \left[f_n > \frac{1}{k} \right] \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} m \left(E \left[f_n > \frac{1}{k} \right] \right) \right) = 0 \quad (475)$$

综上所述, 原命题得证!

逆命题一般不成立。在 $\mathbb{R}$ 上定义 $f_n = 1 - \mathbb{1}_{[0,n]}$, 那么在 $\mathbb{R}$ 上成立 $f_n \rightarrow 0$, 但是取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(\mathbb{R}[f_n > \varepsilon]) = \sum_{n=1}^{\infty} m(\mathbb{R}[1 - \mathbb{1}_{[0,n]} > \varepsilon]) = \sum_{n=1}^{\infty} (m(-\infty, 0) + m(n, \infty)) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(-\infty, 0) = \infty \quad (476)$$

4.1.5 第五题

证明: 如果 f 是有限测度的可测集 E 上的非负可测函数, 那么对于任意 y , $E[f = y]$ 为可测集, 且 $\{y : m(E[f = y]) > 0\}$ 至多为可数集。

证明: $E[f = y]$ 为可测集蕴含于如下事实

$$E[f = y] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[y - \frac{1}{n} < f < y + \frac{1}{n}] \quad (477)$$

由于 $m(E) < \infty$, 那么存在 $M \in \mathbb{N}^*$, 使得 $m(E) < M$ 。注意到

$$\{y : m(E[f = y]) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ y : \frac{M}{n+1} < m(E[f = y]) \leq \frac{M}{n} \right\} \quad (478)$$

如果 $\{y : m(E[f = y]) > 0\}$ 不为可数集, 那么存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得

$$\left\{ y : \frac{M}{k+1} < m(E[f = y]) \leq \frac{M}{k} \right\} \quad (479)$$

不为可数集, 即存在无穷多个 y_i , 使得

$$y_i \in \left\{ y : \frac{M}{k+1} < m(E[f=y]) \leq \frac{M}{k} \right\} \quad (480)$$

那么

$$m(E) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} E[f=y_i]\right) \geq \sum_{i=1}^{k+1} m(E[f=y_i]) > M \quad (481)$$

矛盾! 因此 $\{y : m(E[f=y]) > 0\}$ 至多为可数集。原命题得证!

4.1.6 第六题

证明: 如果 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 那么 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的任意可测集 E 上都可测。

证明: 证明蕴含于如下命题

$$E[f > a] = E \cap f^{-1}((a, \infty)) \quad (482)$$

由2.2.12, $f^{-1}((a, \infty))$ 为开集, 因此为可测集, 于是 $E[f > a]$ 为可测集, 进而 f 在 E 上可测。

4.1.7 第七题

证明: 如果 f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的单调函数, 那么 f 在 E 上可测。

证明: 不妨假设 f 在 E 上单调递增, 任取 $a \in \mathbb{R}$ 。

如果对于任意 $x \in E$, $f(x) \leq a$, 那么 $E[f > a] = \emptyset$ 为可测集。

如果存在 $x \in E$, 使得成立 $f(x) > a$ 。

如果 $E[f > a]$ 存在下界, 记

$$x_0 = \inf E[f > a] \quad (483)$$

断言

$$E \cap (x_0, \infty) \subset E[f > a] \subset E \cap [x_0, \infty) \quad (484)$$

一方面, 对于任意 $x \in E \cap (x_0, \infty)$, 存在 $y \in E \cap (x_0, x)$, 使得成立 $f(x) \geq f(y) > a$, 因此 $x \in E[f > a]$, 进而 $E \cap (x_0, \infty) \subset E[f > a]$ 。

另一方面, 对于任意 $x \in E[f > a]$, 如果 $x < x_0$, 那么 $f(x) \leq a$, 矛盾! 因此 $x \geq x_0$, 那么 $x \in E \cap [x_0, \infty)$, 进而 $E[f > a] \subset E \cap [x_0, \infty)$ 。

综合两方面

$$E \cap (x_0, \infty) \subset E[f > a] \subset E \cap [x_0, \infty) \quad (485)$$

因此 $E[f > a]$ 均为可测集, 进而 f 在 E 上可测。

如果 $E[f > a]$ 不存在下界, 那么存在单调递减数列 $\{x_n\} \subset E[f > a]$, 使得 $x_n \rightarrow -\infty$ 。断言 $E = E[f > a]$ 。

一方面, $E[f > a] \subset E$ 显然。

另一方面, 对于任意 $x \in E$, 存在 $x_k < x$, 那么 $f(x) \geq f(x_k) > a$, 因此 $x \in E[f > a]$, 进而 $E \subset E[f > a]$ 。

综合两方面 $E = E[f > a]$, 因此 $E[f > a]$ 均为可测集, 进而 f 在 E 上可测。

综上所述, f 在 E 上可测。

4.1.8 第八题

证明: f 在可测集 E 上可测, 当且仅当存在 E 上的简单函数序列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得成立 $\varphi_n \rightarrow f$ 。

证明: 充分性显然。

对于必要性, 如果 f 在可测集 E 上可测, 那么由 $f = f^+ - f^-$, f^+ 和 f^- 均在 E 上非负可测, 且存在单调递增的非负简单函数序列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得成立 $\varphi_n \rightarrow f^+$ 和 $\psi_n \rightarrow f^-$, 因此 $\varphi_n - \psi_n \rightarrow f^+ - f^- = f$, 必要性得证!

4.1.9 第九题

证明：如果 f_1 是可测集 $E_1 \subset \mathbb{R}^p$ 上的可测函数， f_2 是可测集 $E_2 \subset \mathbb{R}^q$ 上的可测函数，且 $f_1 f_2$ 在 $E_1 \times E_2$ 几乎处处存在意义，那么 $f_1 f_2$ 在 $E_1 \times E_2$ 上可测。

证明：

法一：对于可测集 $A \subset \mathbb{R}^p$ 和 $B \subset \mathbb{R}^q$ ， $1_A 1_B = 1_{A \times B}$ 是 $\mathbb{R}^{p+q}$ 上的简单函数，因此对于 A 上的简单函数 φ 和 B 上的简单函数 ψ ， $\varphi\psi$ 是 $A \times B$ 上的简单函数。

由 4.1.8，存在 E_1 上的简单函数序列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ ，使得成立 $\varphi_n \rightarrow f_1$ ；存在 E_2 上的简单函数序列 $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ ，使得成立 $\psi_n \rightarrow f_2$ 。那么 $E_1 \times E_2$ 上的简单函数序列 $\{\varphi_n \psi_n\}_{n=1}^\infty$ 满足 $\varphi_n \psi_n \rightarrow f_1 f_2$ ，因此 $f_1 f_2$ 在 $E_1 \times E_2$ 上可测。

法二：将 f_1 和 f_2 看作 $E_1 \times E_2$ 上的函数，任取 $a \in \mathbb{R}$ ，注意到

$$(E_1 \times E_2)[f_1 > a] = E_1[f_1 > a] \times E_2 \quad (486)$$

$$(E_1 \times E_2)[f_2 > a] = E_1 \times E_2[f_2 > a] \quad (487)$$

那么 f_1 和 f_2 在 $E_1 \times E_2$ 上可测，进而 $f_1 f_2$ 在 $E_1 \times E_2$ 上可测。

4.1.10 第十题

4.1.10.1 第一问

对于可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的几乎处处取有限值的函数 f ，证明： f 在 E 上可测，当且仅当对于任意 Borel 集 $B \subset \mathbb{R}$ ， $f^{-1}(B)$ 为可测集。

证明：定义

$$\mathfrak{B}_0 = \{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)\} \quad (488)$$

那么问题转化为： f 在 E 上可测当且仅当 $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$ 。

我们先来证明 $\mathfrak{B}_0$ 为 σ -代数。

由于 $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ ，因此 $\emptyset \in \mathfrak{B}_0$ 。

如果 $B \in \mathfrak{B}_0$ ，那么 $f^{-1}(B^c) = E - f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ ，因此 $\mathfrak{B}_0$ 对补运算封闭。

如果 $\{B_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{B}_0$ ，那么

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) = \bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}(B_n) \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \quad (489)$$

因此 $\mathfrak{B}_0$ 对可数并运算封闭。

于是 $\mathfrak{B}_0$ 为 σ -代数。

对于必要性，如果 f 可测，由于 $f^{-1}((a, b)) = E[a < f < b]$ 为可测集，那么 $(a, b) \in \mathfrak{B}_0$ ，进而 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_0$ ，而显然 $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$ ，那么 $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$ 。

对于充分性，如果 $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$ ，由于 $f^{-1}((a, \infty)) = E[f > a]$ 为可测集，那么 f 可测。

综上所述，原命题得证！

4.1.10.2 第二问

证明：Borel 集在连续函数下的原像是 Borel 集。

证明：令 f 在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上连续，定义

$$\mathfrak{B}_0 = \{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\} \quad (490)$$

即证明： $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$ 。

显然 $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$ ，只需证明 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_0$ 。

我们先来证明 $\mathfrak{B}_0$ 为 σ -代数。

由于 $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ，因此 $\emptyset \in \mathfrak{B}_0$ 。

如果 $B \in \mathfrak{B}_0$ ，那么 $f^{-1}(B^c) = E - f^{-1}(B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ，因此 $\mathfrak{B}_0$ 对补运算封闭。

如果 $\{B_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{B}_0$, 那么

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) = \bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}(B_n) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \quad (491)$$

因此 $\mathfrak{B}_0$ 对可数并运算封闭。

于是 $\mathfrak{B}_0$ 为 σ -代数。

其次我们证明 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_0$, 只需证明 $\mathfrak{B}_0$ 包含 $\mathbb{R}$ 上的所有开集。事实上, 由2.2.12, 开集在连续函数下的原像仍是开集, 于是为Borel集, 因此 $\mathfrak{B}_0$ 包含 $\mathbb{R}$ 上的所有开集。

综上所述, 原命题得证!

4.1.11 第十一题

证明: 如果 f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数, g 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 那么 $g \circ f$ 是 E 上的可测函数。

证明: 如果 f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数, g 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 那么任取 $a \in \mathbb{R}$, 由2.2.12, $g^{-1}((a, \infty))$ 为 $\mathbb{R}$ 上的开集, 因此存在互不相交的开区间序列 $\{I_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$g^{-1}((a, \infty)) = \bigcup_{n=1}^\infty I_n \quad (492)$$

因此

$$\{x \in E : (g \circ f)(x) > a\} = (g \circ f)^{-1}((a, \infty)) = (f^{-1} \circ g^{-1})((a, \infty)) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^\infty I_n\right) = \bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}(I_n) \quad (493)$$

又 f 可测, 那么 $f^{-1}(I_n)$ 可测, 于是 $\{x \in E : (g \circ f)(x) > a\}$ 可测, 进而 $g \circ f$ 是 E 上的可测函数。原命题得证!

4.1.12 第十二题

证明: 如果 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微, 那么对于任意 $k = 1, \dots, n$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数。

证明: 我们仅证 $n = 1$ 时的情况。

定义

$$g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \quad (494)$$

由于 f 可微, 于是 f 连续, 由4.1.6, f 可测, 进而 g_n 可测, 进而 $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ 可测。

4.2 第二节

4.2.1 第一题

构造可测集 E 上的可测函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 满足 f_n 在 E 上几乎处处收敛于 f , 但是对于任意满足 $m(E_0) < \infty$ 的可测子集 $E_0 \subset E$, f_n 在 $E - E_0$ 并不一致收敛于 f 。

解: 令 $E = [0, \infty)$, $f_n = \mathbb{1}_{[n, \infty)}$, 那么在 E 上成立 $f_n \rightarrow 0$ 。任取满足 $m(E_0) < \infty$ 的可测子集 $E_0 \subset E$, 那么对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $x > n$, 使得成立 $x \in E - E_0$ 。若不然, 如果存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $x > n_0$, $x \notin E - E_0$, 那么 $x \in E_0$, 因此 $(n_0, \infty) \subset E_0$, 进而 $m(E_0) > 0$, 矛盾! 注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E - E_0} |f_n| = 1 > 0 \quad (495)$$

因此 f_n 在 $E - E_0$ 并不一致收敛于 f !

4.2.2 第二题

对于有限测度的可测集 E 上的可测函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 证明: 如果 f_n 在 E 上几乎处处收敛于0, 那么存在 E 的单调递增可测子集序列 $\{E_n\}_{n=1}^\infty$, 使得 $m(E_n) \rightarrow m(E)$, 且 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在每一个 E_n 上一致收敛于0。

证明: 由Egorov定理, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 取 $\delta_n = \frac{1}{n}$, 存在可测子集 $E_n \subset E$, 使得 $m(E - E_n) < \delta_n = \frac{1}{n}$, 且 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在 E_n 上一致收敛于0。定义 $\tilde{E}_n = \bigcup_{k=1}^n E_k$, 那么 $\{\tilde{E}_n\}_{n=1}^\infty$ 为 E 的单调递增子集序列, 且 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在每一个 $\tilde{E}_n$ 上一致收敛于0。注意到 $E - \tilde{E}_n \subset E - E_n$, 那么

$$m(E) - m(\tilde{E}_n) = m(E - \tilde{E}_n) \leq m(E - E_n) < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (496)$$

因此 $m(\tilde{E}_n) \rightarrow m(E)$ 。

综上所述，原命题得证！

4.2.3 第三题

对于有限测度的可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ，证明：如果 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在 E 上几乎处处收敛于 0，那么存在子序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ ，使得成立 $\sum_{k=1}^\infty f_{n_k}$ 在 E 上几乎处处绝对收敛。进而证明：存在非负实数序列 $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ ，使得成立 $\sum_{n=1}^\infty t_n = \infty$ ，且在 E 上几乎处处成立 $\sum_{n=1}^\infty |t_n f_n| < \infty$ 。

证明：不妨假设 f 在 E 上处处有限。由 4.2.2，由 f_n 在 E 上几乎处处收敛于 0，可知存在 E 的单调递增可测子集序列 $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ ，使得 $m(E_n) \rightarrow m(E)$ ，且 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在每一个 E_n 上一致收敛于 0，那么

$$m\left(E - \bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = 0 \quad (497)$$

构造子序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ ，使得在 $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ 上处处绝对收敛。

由 f_n 在 E_1 上一致收敛于 0：

- 存在 $n_1^{(1)} \geq 1$ ，使得在 E_1 上成立 $|f_{n_1^{(1)}}| \leq \frac{1}{2^1}$ 。
- 递归的，假设已经得到了 $n_k^{(1)}$ ，那么存在 $n_{k+1}^{(1)} > n_k^{(1)}$ ，使得在 E_1 上成立 $|f_{n_{k+1}^{(1)}}| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ 。

那么我们得到了 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 的子序列 $\{f_{n_k^{(1)}}\}_{k=1}^\infty$ ，使得对于任意 k ，在 E_1 上成立 $|f_{n_k^{(1)}}| \leq \frac{1}{2^k}$ 。

递归的，假设已经得到了序列 $\{f_{n_k^{(i)}}\}_{k=1}^\infty$ ，由于 $\{f_{n_k^{(i)}}\}_{k=1}^\infty$ 在 E_{i+1} 上一致收敛于 0，那么可得到 $\{f_{n_k^{(i)}}\}_{k=1}^\infty$ 的子序列 $\{f_{n_k^{(i+1)}}\}_{k=1}^\infty$ ，使得对于任意 k ，在 E_{i+1} 上成立 $|f_{n_k^{(i+1)}}| \leq \frac{1}{2^k}$ 。

那么我们得到了序列 $\{f_{n_k^{(i)}}\}_{k,i=1}^\infty$ ，其中 $\{f_{n_k^{(i+1)}}\}_{k=1}^\infty$ 为 $\{f_{n_k^{(i)}}\}_{k=1}^\infty$ 的子序列，且在 E_i 上成立 $|f_{n_k^{(i)}}| \leq \frac{1}{2^k}$ 。

定义序列 $f_{n_k} = f_{n_k^{(k)}}$ ，那么对于任意 $x \in \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ ，存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$ ，使得 $x \in E_{n_0} \subset E_{n_0+1} \subset \dots$ ，那么

$$\sum_{k=1}^\infty |f_{n_k}(x)| = \sum_{k=1}^{n_0-1} |f_{n_k}(x)| + \sum_{k=n_0}^\infty |f_{n_k}(x)| \leq \sum_{k=1}^{n_0-1} |f_{n_k}(x)| + \sum_{k=n_0}^\infty \frac{1}{2^k} < \sum_{k=1}^{n_0-1} |f_{n_k}(x)| + \frac{1}{2^{n_0}} < \infty \quad (498)$$

于是 $\sum_{k=1}^\infty f_{n_k}$ 在 $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ 处处绝对收敛，进而在 E 上几乎处处绝对收敛。

定义

$$t_n = \begin{cases} 1, & \exists k, n_k = n \\ 0, & \forall k, n_k \neq n \end{cases} \quad (499)$$

显然成立 $\sum_{n=1}^\infty t_n = \infty$ ，且在 $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ 上成立

$$\sum_{n=1}^\infty |t_n f_n| = \sum_{k=1}^\infty |f_{n_k}(x)| < \infty \quad (500)$$

进而在 E 上几乎处处成立 $\sum_{n=1}^\infty |t_n f_n| < \infty$ 。

综上所述，原命题得证！

4.2.4 第四题

对于可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ，证明：如果 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在 E 上几乎处处收敛于 0，那么存在子序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ ，使得成立 $\sum_{k=1}^\infty f_{n_k}$ 在 E 上几乎处处绝对收敛。进而证明：存在非负实数序列 $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ ，使得成立 $\sum_{n=1}^\infty t_n = \infty$ ，且在 E 上几乎处处成立 $\sum_{n=1}^\infty t_n f_n < \infty$ 。

证明：不妨假设 f 在 E 上处处有限。定义 $E_n = E \cap B_n$ 。

由 4.2.3，对于 E_1 ，存在 $F_1 \subset E_1$ 和 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 的子序列 $\{f_{n_k^{(1)}}\}_{k=1}^\infty$ ，使得成立 $m(E_1 - F_1) = 0$ 且 $\sum_{k=1}^\infty f_{n_k^{(1)}}$ 在 F_1 上处处绝对收敛。

递归的，假设已经得到了 F_i 和 $\{f_{n_k^{(i)}}\}_{k=1}^\infty$ ，由 4.2.3，对于 E_{i+1} ，存在 $F_i \subset F_{i+1} \subset E_{i+1}$ 和 $\{f_{n_k^{(i)}}\}_{k=1}^\infty$ 的子序列 $\{f_{n_k^{(i+1)}}\}_{k=1}^\infty$ ，使得成立 $m(E_{i+1} - F_{i+1}) = 0$ 且 $\sum_{k=1}^\infty f_{n_k^{(i+1)}}$ 在 F_{i+1} 上处处绝对收敛。

那么我们得到了单调递增序列 $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和序列 $\{f_{n_k^{(i)}}\}_{k,i=1}^{\infty}$, 其中 $\{f_{n_k^{(i+1)}}\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $\{f_{n_k^{(i)}}\}_{k=1}^{\infty}$ 的子序列, $F_i \subset E_i$ 且 $m(E_i - F_i) = 0$, 同时 $\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k^{(i)}}$ 在 F_i 上处处绝对收敛。

定义 $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, 注意到

$$E - F = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c \right) \right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap F_n^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n - F_n) \quad (501)$$

那么

$$m(E - F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n - F_n) = 0 \quad (502)$$

定义序列 $f_{n_k} = f_{n_k^{(k)}}$, 任取 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$, 使得 $x \in F_{n_0} \subset F_{n_0+1} \subset \dots$, 那么

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x)| = \sum_{k=1}^{n_0-1} |f_{n_k}(x)| + \sum_{k=n_0}^{\infty} |f_{n_k}(x)| \leq \sum_{k=1}^{n_0-1} |f_{n_k}(x)| + \sum_{k=n_0}^{\infty} |f_{n_k^{(n_0)}}(x)| < \infty \quad (503)$$

于是序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 上处处绝对收敛, 进而序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 在 E 上几乎处处绝对收敛。

定义

$$t_n = \begin{cases} 1, & \exists k, n_k = n \\ 0, & \forall k, n_k \neq n \end{cases} \quad (504)$$

显然成立 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty$, 且在 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 上成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n f_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x)| < \infty \quad (505)$$

进而在 E 上几乎处处成立 $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n f_n| < \infty$ 。

综上所述, 原命题得证!

4.3 第三节

4.3.1 第一题

对于可测集 $E \subset \mathbb{R}^m$ 上的几乎处处有限的函数 f , 证明: f 在 E 上可测, 当且仅当存在在 $\mathbb{R}^n$ 上连续的函数序列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得在 E 上几乎处处成立 $\varphi_n \rightarrow f$ 。

证明: 由4.1.6, 充分性显然。

对于必要性, 由Luzin定理, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在闭集 $F_n \subset E$, 使得成立 $m(E - F_n) < \frac{1}{n}$, 且 f 在 F_n 上连续。定义 $\tilde{F}_n = \bigcup_{k=1}^n F_k$, $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n$, 那么 $\{\tilde{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 E 的单调递增子集序列, 且 f 在 $\tilde{F}_n$ 上连续, 由Tietze延拓定理, 将 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上延拓为连续函数 φ_n , 使得成立 $\varphi_n|_{\tilde{F}_n} = f$ 。注意到

$$E - F = E - \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n = E - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E - F_n) \quad (506)$$

于是

$$m(E - F) \leq m(E - F_n) < \frac{1}{n} \quad (507)$$

那么 $m(E - F) = 0$ 。对于任意 $x \in F$, 存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得成立 $x \in \tilde{F}_k \subset \tilde{F}_{k+1} \subset \dots$, 于是当 $n \geq k$ 时, $\varphi_n(x) = f(x)$, 因此在 F 上成立 $\varphi_n \rightarrow f$, 进而在 E 上几乎处处成立 $\varphi_n \rightarrow f$ 。必要性得证!

综上所述, 原命题得证!

4.3.2 第二题

证明: 紧集在连续函数下的像为紧集。

证明: 对于紧集 K , 以及连续函数 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, 证明 $f(K)$ 为紧集。

任取 $f(K)$ 的开覆盖

$$f(K) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \quad (508)$$

由2.2.12, $f^{-1}(G_\lambda)$ 为开集, 而由于

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(G_\lambda) \quad (509)$$

那么存在有限子覆盖 $\{G_k\}_{k=1}^n$, 使得

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n f^{-1}(G_k) \quad (510)$$

于是

$$f(K) \subset \bigcup_{k=1}^n G_k \quad (511)$$

因此 $f(K)$ 为紧集。

4.4 第四节

4.4.1 第一题

对于可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{g_n\}_{n=1}^\infty$ 和可测函数 f, g , 证明: 如果 $f_n \xrightarrow{m} f, g_n \xrightarrow{m} g$, 那么 $f_n + g_n \xrightarrow{m} f + g$.

证明: 任取 $\varepsilon > 0$, 由于对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 成立

$$|(f_n + g_n) - (f + g)| \leq |f_n - f| + |g_n - g| \quad (512)$$

那么如果 $|(f_n + g_n) - (f + g)| \geq \varepsilon$, 则或 $|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ 成立, 或 $|g_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ 成立, 因此

$$E[|(f_n + g_n) - (f + g)| \geq \varepsilon] \subset E[|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}] \cup E[|g_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}] \quad (513)$$

于是

$$m(E[|(f_n + g_n) - (f + g)| \geq \varepsilon]) \leq m(E[|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}]) + m(E[|g_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}]) \quad (514)$$

对 n 取极限, 由 $f_n \xrightarrow{m} f, g_n \xrightarrow{m} g$, 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(E[|(f_n + g_n) - (f + g)| \geq \varepsilon]) = 0 \quad (515)$$

因此

$$f_n + g_n \xrightarrow{m} f + g \quad (516)$$

原命题得证!

4.4.2 第二题

对于可测集 E 上的可测函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 和几乎处处有限的可测函数 f , 证明: 如果存在 $M > 0$, 使得在 E 上对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 几乎处处成立 $|f_n| \leq M$, 且 $f_n \xrightarrow{m} f$, 那么在 E 上几乎处处成立 $|f| \leq M$.

证明: 由Riesz定理, 存在 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 的子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, 使得在 E 上几乎处处成立 $f_{n_k} \rightarrow f$, 又在 E 上对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 几乎处处成立 $|f_n| \leq M$, 那么存在零测集 N , 使得在 $E - N$ 上成立 $|f_{n_k}| \leq M$ 和 $f_{n_k} \rightarrow f$, 由极限的保序性, 在 $E - N$ 上成立 $|f| \leq M$, 因此在 E 上几乎处处成立 $|f| \leq M$.

4.4.3 第三题

对于可测集 E , 构造在 E 上的几乎处处有限的可测函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 和在 E 上的几乎处处有限的可测函数 f , 使得在 E 上几乎处处成立 $f_n \rightarrow f$, 但不成立 $f_n \xrightarrow{m} f$.

解: 令 $E = [0, \infty)$, $f_n = 1_{[n, \infty)}$, 那么在 E 上成立 $f_n \rightarrow 0$, 但是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(E[|f_n| \geq \frac{1}{2}]) = \infty \quad (517)$$

因此不成立 $f_n \xrightarrow{m} f$ 。

第五章

5.1 第一节

5.1.1 第一题

Dirichlet函数:

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} \quad (518)$$

Riemann函数:

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x = \frac{q}{p} \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}, (p, q) = 1 \\ 0, & x \in (0, 1) - \mathbb{Q} \end{cases} \quad (519)$$

证明:

$$\int \mathcal{D} = \int \mathcal{R} = 0 \quad (520)$$

证明: 显然 $\mathcal{D}$ 为简单函数

$$\mathcal{D} = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \quad (521)$$

因此

$$\int \mathcal{D} = m(\mathbb{Q}) = 0 \quad (522)$$

而对于Riemann函数, 记

$$(0, 1) \cap \mathbb{Q} = \left\{ \frac{q_n}{p_n} \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad (p_n, q_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (523)$$

定义

$$\mathcal{R}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{p_n}, & x = \frac{q_n}{p_n} \\ 0, & x \in (0, 1) - \left\{ \frac{q_n}{p_n} \right\} \end{cases} \quad (524)$$

那么

$$\int \mathcal{R}_n = 0 \quad (525)$$

$$\mathcal{R} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n \quad (526)$$

由Lebesgue基本定理

$$\int \mathcal{R} = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathcal{R}_n = 0 \quad (527)$$

5.1.2 第二题

证明: 对于有限可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 以及非负有界函数 f , 成立

$$\overline{\int}_E f + g \leq \overline{\int}_E f + \overline{\int}_E g, \quad \underline{\int}_E f + g \geq \underline{\int}_E f + \underline{\int}_E g \quad (528)$$

证明: 对于第一式. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 E 的两个分划 D_1 和 D_2 , 使得成立

$$S_{D_1}^{(f)} < \overline{\int}_E f + \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_{D_2}^{(g)} < \overline{\int}_E g + \frac{\varepsilon}{2} \quad (529)$$

合并 D_1 和 D_2 为 E 的更为细密的分划 D , 那么

$$\overline{\int_E f + g} \leq S_D^{(f+g)} \leq S_D^{(f)} + S_D^{(g)} \leq S_{D_1}^{(f)} + S_{D_2}^{(g)} < \overline{\int_E f} + \overline{\int_E g} + \varepsilon \quad (530)$$

由 ε 的任意性

$$\overline{\int_E f + g} \leq \overline{\int_E f} + \overline{\int_E g} \quad (531)$$

第一式得证!

对于第二式, 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 E 的两个分划 D_1 和 D_2 , 使得成立

$$s_{D_1}^{(f)} > \int_{\underline{E}} f + \frac{\varepsilon}{2}, \quad s_{D_2}^{(g)} > \int_{\underline{E}} g + \frac{\varepsilon}{2} \quad (532)$$

合并 D_1 和 D_2 为 E 的更为细密的分划 D , 那么

$$\int_{\underline{E}} f + g \geq s_D^{(f+g)} \geq s_D^{(f)} + s_D^{(g)} \geq s_{D_1}^{(f)} + s_{D_2}^{(g)} > \int_{\underline{E}} f + \int_{\underline{E}} g + \varepsilon \quad (533)$$

由 ε 的任意性

$$\int_{\underline{E}} f + g \geq \int_{\underline{E}} f + \int_{\underline{E}} g \quad (534)$$

第二式得证!

5.1.3 第三题

证明Levi定理: 对于可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负单调递增可测函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 如果 $f_n \rightarrow f$, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f \quad (535)$$

5.1.4 第四题

证明: 对于可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负函数 f , 如果

$$\int_E f = 0 \quad (536)$$

那么在 E 上几乎处处成立 $f = 0$ 。

证明: 定义

$$E_n = E[f > \frac{1}{n}] \quad (537)$$

那么

$$0 = \int_E f \geq \int_{E_n} f \geq \frac{1}{n} \int_{E_n} 1 = \frac{1}{n} m(E_n) \geq 0 \quad (538)$$

因此 $m(E_n) = 0$, 于是

$$m(E[f > 0]) = m\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty m(E_n) = 0 \quad (539)$$

进而在 E 上几乎处处成立 $f = 0$ 。

5.1.5 第五题

证明: 对于有限测度的可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数 f , 成立

$$\int_E f < \infty \iff \sum_{n=0}^\infty 2^n m(E[f \geq 2^n]) < \infty \quad (540)$$

证明: 定义 $E_n = E[2^n \leq f < 2^{n+1}]$, 那么充分性蕴含于如下不等式

$$\int_E f = \int_{E[0 \leq f < 1]} f + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f \leq m(E[0 \leq f < 1]) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n m(E_n) \quad (541)$$

$$\leq m(E) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n m(E[f \geq 2^n]) < \infty \quad (542)$$

必要性蕴含于如下不等式。

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n m(E[f \geq 2^n]) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} 2^n m(E_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k 2^n m(E_k) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1) m(E_n) \quad (543)$$

$$\leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n m(E_n) \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f = 2 \int_{E[f \geq 1]} f \leq 2 \int_E f < \infty \quad (544)$$

即我们得到如下不等式

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n m(E[f \geq 2^n]) \leq \int_E f \leq m(E) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n m(E[f \geq 2^n]) \quad (545)$$

5.1.6 第六题

证明：对于可测集 E 上的非负可测函数 f 和 g ，如果对于任意 $a \in \mathbb{R}$ ，成立

$$m(E[f \geq a]) = m(E[g \geq a]) \quad (546)$$

那么

$$\int_E f = \int_E g \quad (547)$$

证明：如果存在 $a > 0$ ，使得

$$m(E[f \geq a]) = m(E[g \geq a]) = \infty \quad (548)$$

那么

$$\int_E f = \int_E g = \infty \quad (549)$$

下面假设对于任意 $a > 0$ ，成立

$$m(E[f \geq a]) = m(E[g \geq a]) < \infty \quad (550)$$

任取 $a < b \in \mathbb{R}^+$ ，由于

$$E[a \leq f < b] = E[f \geq a] - E[f \geq b] \quad (551)$$

那么

$$m(E[a \leq f < b]) = m(E[f \geq a]) - m(E[f \geq b]) = m(E[g \geq a]) - m(E[g \geq b]) = m(E[a \leq g < b]) \quad (552)$$

定义

$$A_n^{(k)} = E\left[\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\right], \quad n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n2^n - 1 \quad (553)$$

$$B_n^{(k)} = E\left[\frac{k}{2^n} \leq g < \frac{k+1}{2^n}\right], \quad n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n2^n - 1 \quad (554)$$

$$A_n^{(n2^n)} = E[f \geq n], \quad B_n^{(n2^n)} = E[g \geq n] \quad (555)$$

那么 $\{A_n^{(k)}\}$ 互不相交， $\{B_n^{(k)}\}$ 互不相交，且

$$E = \bigcup_{k=0}^{n2^n} A_n^{(k)} = \bigcup_{k=0}^{n2^n} B_n^{(k)} \quad (556)$$

定义单调递增的简单函数为

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{A_n^{(k)}}, \quad \psi_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{B_n^{(k)}} \quad (557)$$

那么

$$\varphi_n \rightarrow f, \quad \psi_n \rightarrow g \quad (558)$$

注意到

$$m(A_n^{(k)}) = m(B_n^{(k)}) \quad (559)$$

那么

$$\int_E \varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} m(A_n^{(k)}) = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} m(B_n^{(k)}) = \int_E \varphi_n \quad (560)$$

因此由Levi定理

$$\int_E f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \psi_n = \int_E g \quad (561)$$

综上所述, 原命题得证!

5.1.7 第七题

对于有限测度的可测集 E 上的非负有界可测函数 f , $0 \leq f < M$, 对于 $[0, M]$ 的任意划分

$$0 = y_0^{(n)} < y_1^{(n)} < \cdots < y_{k_n}^{(n)} = M \quad (562)$$

满足

$$\max\{y_i^{(n)} - y_{i-1}^{(n)} : i = 1, \cdots, k_n\} = d_n \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty) \quad (563)$$

令

$$E_i^{(n)} = E[y_{i-1}^{(n)} \leq f < y_i^{(n)}], \quad \xi_i^{(n)} \in E_i^{(n)} \quad (564)$$

证明:

$$\int_E f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}) m(E_i^{(n)}) \quad (565)$$

证明: 记 E 的划分 $\{E_i^{(n)}\}_{i=1}^{k_n}$ 为 D_n , f 关于 D_n 的小和数与大和数分别为 $s_{D_n}^{(f)}$ 和 $S_{D_n}^{(f)}$, 注意到

$$0 \leq S_{D_n}^{(f)} - s_{D_n}^{(f)} \leq m(E) d_n \rightarrow 0 \quad (566)$$

于是

$$\int_E f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{D_n}^{(f)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{D_n}^{(f)} \quad (567)$$

而由于

$$\inf_{x \in E_i^{(n)}} f(x) \leq f(\xi_i^{(n)}) \leq \sup_{x \in E_i^{(n)}} f(x) \quad (568)$$

那么

$$\inf_{x \in E_i^{(n)}} f(x) m(E_i^{(n)}) \leq f(\xi_i^{(n)}) m(E_i^{(n)}) \leq \sup_{x \in E_i^{(n)}} f(x) m(E_i^{(n)}) \quad (569)$$

进而

$$0 \leq s_{D_n}^{(f)} \leq \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}) m(E_i^{(n)}) \leq S_{D_n}^{(f)} < \infty \quad (570)$$

取极限

$$\int_E f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}) m(E_i^{(n)}) \quad (571)$$

原命题得证!

5.1.8 第八题

证明：对于有限测度的可测集 E 上的非负有界可测函数 f ，记 $E_n = E[f \geq n]$ ，如果 $\int_E f < \infty$ ，那么 $nm(E_n) \rightarrow 0$ 。

证明：定义

$$F_n = E[n \leq f < n+1] \quad (572)$$

那么

$$E_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} F_k \quad (573)$$

于是

$$nm(E_n) = n \sum_{k=n}^{\infty} m(F_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} km(F_k) \quad (574)$$

由于

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \quad (575)$$

那么

$$\sum_{n=0}^{\infty} nm(F_n) \leq \int_E f < \infty \quad (576)$$

进而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} km(F_k) = 0 \quad (577)$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nm(E_n) = 0 \quad (578)$$

5.1.9 第九题

对于可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数 f ，证明：如果 $\int_E f < \infty$ ，定义

$$F(x) = \int_{E \cap B_x} f, \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (579)$$

那么 F 是 $\mathbb{R}^+$ 上的连续函数。

证明：定义 $E_x = E \cap B_x$ 。

注意到

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} m(E_{x+\Delta x} - E_x) = 0 \quad (580)$$

那么当 $\Delta x > 0$ 时，由于 f 在 E 上可积，那么 f 在 E 上积分绝对连续，那么对于任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < \Delta x < \delta$ 时，成立

$$|F(x + \Delta x) - F(x)| = \int_{E_{x+\Delta x} - E_x} f < \varepsilon \quad (581)$$

进而 F 是连续的。原命题得证！

5.1.10 第十题

证明：对于可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数 f ，如果 $\int_E f < \infty$ ，那么对于任意 $0 \leq c \leq \int_E f$ ，存在 $F \subset E$ ，使得 $\int_F f = c$ 。

证明：若 $c = 0$ ，那么取 $F = \emptyset$ 即可。

若 $c = \int_E f$ ，取 $F = E$ 即可。

若 $0 < c < \int_E f$, 由5.1.9, 定义

$$F(x) = \int_{E \cap B_x} f, \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (582)$$

注意到

$$F(0^+) = 0, \quad F(\infty) = \int_E f \quad (583)$$

由于 F 的连续性, 那么存在 x , 使得 $F(x) = c$ 。

综上所述, 原命题得证!

5.1.11 第十一题

证明: 对于有限测度的可测集 E , $\{E_i\}_{i=1}^n$ 为 E 的可测子集, 如果对于任意 $x \in E$, 存在至少 k 个 E_i , 使得 $x \in E_i$, 其中 $1 \leq k \leq n$, 那么存在 j , 使得 $m(E_j) \geq \frac{k}{n} m(E)$ 。

证明: 反证, 假设对于任意 $1 \leq i \leq n$, 成立 $m(E_i) < \frac{k}{n} m(E)$ 。任取 $x \in E$, 那么

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{E_i}(x) \geq k \quad (584)$$

于是

$$\sum_{i=1}^n m(E_i) = \sum_{i=1}^n \int_E \mathbb{1}_{E_i} = \int_E \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{E_i} \geq km(E) > nm(E_i) \quad (585)$$

矛盾! 因此在 j , 使得 $m(E_j) \geq \frac{k}{n} m(E)$ 。

5.2 第二节

5.2.1 第一题

对于有限测度的可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数 f , 定义

$$E_n = E[n-1 \leq f < n], \quad n \in \mathbb{Z} \quad (586)$$

证明: f 在 E 上可积当且仅当

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| m(E_n) < \infty \quad (587)$$

证明: f 在 E 上可积当且仅当

$$\int_E f^+ < \infty, \quad \int_E f^- < \infty \quad (588)$$

注意到

$$\int_E f^+ = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \quad (589)$$

$$\int_E f^- = \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} E_{-n}} f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_{-n}} f \quad (590)$$

那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} nm(E_n) - m(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)m(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \int_{E_n} f \leq \int_E f^+ \leq \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{E_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} nm(E_n) \quad (591)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_{-n}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)m(E_{-n}) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_{E_{-n}} f \leq \int_E f^- \leq \sum_{n=0}^{\infty} n \int_{E_{-n}} f = \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_{-n}) \quad (592)$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} nm(E_n) - m(E) \leq \int_E f^+ \leq \sum_{n=1}^{\infty} nm(E_n) \quad (593)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_{-n}) \leq \int_E f^- \leq \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_{-n}) \quad (594)$$

因此原命题得证!

5.2.2 第二题

证明: $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 上 Riemann 可积但 Lebesgue 不可积, $\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上 Riemann 不可积且 Lebesgue 不可积。

证明: 对于 $\frac{\sin x}{x}$, 由 Dirichlet 判别法, $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 上 Riemann 可积, 对于其 Lebesgue 积分

$$\int_{[2\pi, \infty)} \frac{\sin x}{x} = \int_{[2\pi, \infty)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^+ - \int_{[2\pi, \infty)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^- \quad (595)$$

其中

$$\int_{[2\pi, \infty)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^+ = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} [2n\pi, (2n+1)\pi)} \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[2n\pi, (2n+1)\pi)} \frac{\sin x}{x} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[2n\pi, (2n+1)\pi)} \frac{\sin x}{(2n+1)\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} = \infty \quad (596)$$

因此 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 上 Lebesgue 不可积。

对于 $\frac{1}{x}$, 显然在 $(0, 1)$ 上 Riemann 不可积, 而对于其 Lebesgue 积分

$$\int_{(0,1)} \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,1)} \min\left\{\frac{1}{x}, n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, \frac{1}{n})} n + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(\frac{1}{n}, 1)} \frac{1}{x} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty \quad (597)$$

因此在 $(0, 1)$ 上 Lebesgue 不可积。

5.2.6 第六题

5.2.6.1 第一问

证明:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}, \quad p > -1 \quad (598)$$

证明:

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{p+n} \ln \frac{1}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2} \quad (599)$$

5.2.6.2 第二问

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \pi \left(\frac{1}{e^{2a\pi} - 1} - \frac{1}{2a\pi} + \frac{1}{2} \right), \quad a > 0 \quad (600)$$

证明:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^{nx}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2} = \frac{a\pi \coth(a\pi) - 1}{2a} \quad (601)$$